Modélisation statistique de la turbulence en Aérodynamique

Isabelle Vallet

Chapitre I - Rappels

1- Définition d'un écoulement turbulent

- La turbulence est une propriété de l'écoulement et non pas du fluide lui-même
- impossible de donner une vraie définition, mais une liste de propriétés, notamment :
  - Ecoulement 3-D
  - Ecoulement rotationnel
  - Ecoulement instationnaire
  - Ecoulement inégulier en temps et en espace
  - nombre de Reynolds élevé ($Re > Re_c$)
  - Ecoulement qui diffuse fortement toute quantité transportable (masse, qdm, énergie)
  - Ecoulement qui dissipe l'énergie cinétique turbulente k, càd la transforme en chaleur

Conséquences :

Un écoulement laminaire peut être décrit par une approche déterministe (c'est à dire, comme une fonction du temps et de l'espace). Cet écoulement laminaire peut transitionner vers un écoulement turbulent souvent à cause d'un nombre de Reynolds élevé qui lorsque $Re > Re_c$, va rendre les petites perturbations instables.

Un écoulement turbulent est par nature aléatoire, donc on peut le décrire en utilisant des lois de probabilité. c'est la raison pour laquelle on utilise des statistiques.

→ cf. images écoulements turbulents

Remarque : Il existe des écoulements statistiquement 2D, mais il existe toujours des fluctuations des 3 composantes de la vitesse, l'une d'elles a des variations autour d'une moyenne nulle.

Il existe des écoulements statistiquement stationnaire : l'écoulement moyen est indépendant du temps.

2.11 Cascade d'Energie - Echelles caractéristiques de la turbulence

- Un écoulement turbulent ne peut pas subsister sans un transfert (apport) permanent d'énergie, sinon le nombre de Reynolds turbulent décroit et l'écoulement tend à redevenir laminaire (ex: turbulence de grille).

- Une source courante d'énergie cinétique turbulente est le cisaillement dans l'écoulement moyen.

Ainsi on a une cascade d'energie, où les gros tourbillons (càd les fluctuations à grande échelle) tirent de l'énergie cinétique du mouvement moyen (ceci se fait car échelle de longueur du même ordre de grandeur), puis la transfèrent à des tourbillons de plus petite taille, etc..., jusqu'à ce que la taille des petits tourbillons soit suffisamment petite pour que la viscosité puisse agir et dissipe l'énergie cinétique turbulente en chaleur.

- les gros tourbillons s'appellent tourbillons producteurs.
- les petits tourbillons s'appellent tourbillons dissipateurs, ils sont caractérisés par des micro-échelles v_k, l_k et τ_k appelés échelles de Kolmogorov

- **Remarque** : le nombre de Reynolds turbulent $Re_t = \frac{VL}{\nu}$:

échelle de vitesse turbulente : $V = \sqrt{k}$ car $k = \frac{\overline{u_i' u_i'}}{2}$: énergie cinétique turbulente

échelle de tps turbulent : $T = \frac{k}{\varepsilon}$ car dans l'équation de k, ε dissipe k en chaleur par unité de temps

$\Rightarrow$ $L = VT = \frac{k^{3/2}}{\varepsilon} = l_T$: échelle de longueur turbulente

donc $Re_t = \frac{k^2}{\nu \varepsilon}$: nombre de Reynolds turbulent

Pour les tourbillons dissipateurs de Kolmogorov $Re_{t_k} = 1$ *

$$\Rightarrow Re_{t_k} = \frac{k^2}{\nu \varepsilon} = 1 \quad \Rightarrow \quad k^2 = \nu \varepsilon$$

d'où les micro échelles de Kolmogorov :

$$\begin{cases} v_k = \sqrt{k} = (\nu \varepsilon)^{1/4} \\ \tau_k = \frac{k}{\varepsilon} = \frac{\sqrt{\nu \varepsilon}}{\varepsilon} = \sqrt{\frac{\nu}{\varepsilon}} \\ l_k = \frac{k^{3/2}}{\varepsilon} = \frac{(\nu \varepsilon)^{3/4}}{\varepsilon} = \left(\frac{\nu^3}{\varepsilon}\right)^{1/4} \end{cases}$$

* car k est dissipée en un temps τ_k. Or pour qu'il en soit ainsi, l_k doit être du même ordre de grandeur qu'une couche-visqueuse qui se développerait en τ_k

$$l_k = \sqrt{\nu \tau_k} \text{ or } l_k = \tau_k v_k \Rightarrow v_k = \frac{l_k}{\tau_k} \Rightarrow Re_{t_k} = \frac{v_k l_k}{\nu} = \frac{l_k^2}{\nu \tau_k} = \frac{l_k^2}{l_k^2} = 1$$

Remarque : ∘ la viscosité du fluide ne détermine pas le taux de dissipation, mais l'échelle à laquelle cette dissipation se produit

∘ Plus le nombre de Reynolds turbulent est élevé, plus les tourbillons de kolmogorov sont petits

$$\text{car} \quad \ell_k = \frac{\ell_T}{(Re_T)^{3/4}}$$

démo :
$$\ell_k = \left(\frac{\nu^3}{\varepsilon}\right)^{1/4} = \left(\frac{\nu^3}{\varepsilon}\,\frac{\varepsilon^3}{\varepsilon^3}\,\frac{k^6}{k^6}\right)^{1/4} = \left(\frac{\nu^3\varepsilon^3}{k^6}\cdot\frac{k^6}{\varepsilon^4}\right)^{1/4}$$
$$= \left(\frac{1}{Re_T^3}\cdot\frac{k^6}{\varepsilon^4}\right)^{1/4} = \frac{1}{Re_T^{3/4}}\cdot\frac{k^{3/2}}{\varepsilon}$$
$$= \frac{\ell_T}{Re_T^{3/4}} \quad \text{cqfd.}$$

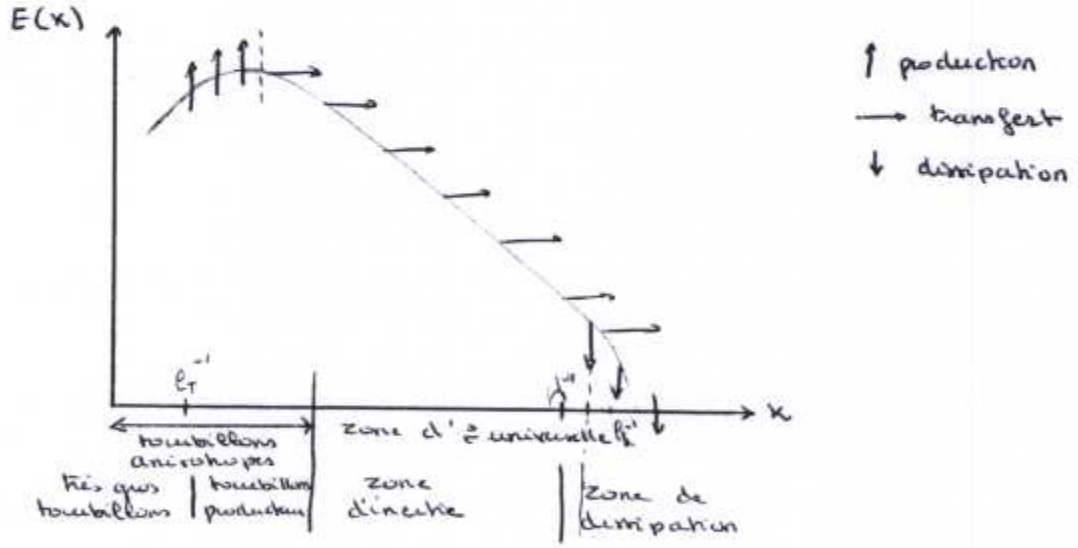
+ Re_T est grand, + il y a d'étapes dans la cascade d'énergie.

Donc une des difficultés supplémentaires dans les écoulements turbulents, est qu'il existe une grande quantité d'échelles caractéristiques.

Une façon de représenter la cascade d'énergie est de représenter le spectre d'énergie E en fonction du nombre d'onde κ.

avec $k = \int_0^\infty E(\kappa)\,d\kappa$ $\qquad$ κ = nombre d'onde

$\frac{2\pi}{\kappa}$ = longueur d'onde



- λ est la micro échelle de Taylor définie par $\varepsilon = 10\,\nu\,k/\lambda^2$ qui correspond à la taille des structures jusqu'à laquelle l'énergie cascade sans dissipation appréciable

3) Equations de Navier-Stokes Instantanées.

Puisque l'échelle de longueur de Kolmogorov l_K est nettement supérieure au libre parcours moyen des molécules l_m

$$l_K \gg l_m$$

l'étude des écoulements turbulents relève de la mécanique des milieux continus.

⇒ La résolution directe des Equations de Navier-Stokes permet théoriquement d'étudier les écoulements turbulents.

DNS : Direct Numerical Simulation

cependant, il faut décrire correctement le spectre d'énergie et par conséquent avoir un maillage suffisamment fin pour décrire jusqu'aux échelles de Kolmogorov

⇒ Plus le nombre de Reynolds est élevé, + l_K est petit

⇒ La capacité des supercalculateurs limite la DNS à des écoulements relativements simples (non industriels).

Remarque : Dans la DNS on résout les équations de Navier-Stokes, puis on applique les moyennes (une approche statistique).
✗ aux modèles statistiques où on résout directement les équations de Navier-Stokes moyennées.

Donc les équations instantanées de Navier-Stokes, où les forces volumiques sont négligées (bonne approximation en aérodynamique; en turbomachines également puisque les forces dues à la rotation sont incluses dans modèles turbulence RSM).

En modélisation de la turbulence statistique, on ne travaille qu'en notation indicielle (repère cartésien). L'utilisation de méthodes permet de généraliser à un repère non cartésien.

3.1) Conservation de la masse

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \vec{V} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \underbrace{\vec{V} \cdot \operatorname{grad} \rho}_{(\operatorname{grad}\rho)\cdot\vec{V} \text{ (en réalité !)}} + \rho \operatorname{div} \vec{V} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{V}) = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_i} = 0 \qquad i = 1, 2, 3$$

3.2 Conservation de la quantité de mouvement

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \operatorname{div} \mathbb{T} + \rho \vec{f_v}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\rho \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\operatorname{grad} \vec{v}).\vec{v} \right]}_{\text{forme non conservative}} = \operatorname{div} \mathbb{T} = -\operatorname{grad} p + \operatorname{div} \mathbb{\tau}$$

on passe d'une forme à l'autre en utilisant la conservation de la masse

$$\Leftrightarrow \underbrace{\frac{\partial \rho \vec{v}}{\partial t} + \operatorname{div} (\rho \vec{v} \otimes \vec{v})}_{\text{forme conservative}} = -\operatorname{grad} p + \operatorname{div} \mathbb{\tau}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\ell} (\rho u_i u_\ell) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{i\ell}}{\partial x_\ell} \qquad \begin{matrix} i = 1, 2, 3 \\ \ell = 1, 2, 3 \end{matrix}$$

pour un fluide newtonien : $\mathbb{\tau} = 2\mu \mathbb{D} + \lambda \underbrace{(\operatorname{tr} \mathbb{D})}_{\operatorname{div} \vec{v}} \mathbb{1}$

$$\mathbb{D} = \frac{1}{2} \left[\operatorname{grad} \vec{v} + (\operatorname{grad} \vec{v})^T \right]$$

$$\Leftrightarrow \tau_{i\ell} = 2\mu D_{i\ell} + \lambda \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \quad \leftarrow \text{tenseur des tensions visqueuses}$$

$$\vdots \quad D_{i\ell} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right] \quad \leftarrow \text{tenseur du taux de déformation}$$

$$\hookrightarrow \tau_{i\ell} = \mu \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right] + \lambda \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij}$$

λ et μ sont les coefficients de viscosité, δ_{ij} le symbole de Kronecker et en aérodynamique on considère l'hypothèse de Stokes : $\boxed{\lambda = -\frac{2}{3}\mu}$

μ = viscosité dynamique.

3.3 Conservation de l'Energie totale

$$\rho \frac{Dh_t}{Dt} = \frac{\partial p}{\partial t} + \operatorname{div} (\vec{v}.\tau - \vec{q}) + \rho \vec{f_v}.\vec{v}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial (\rho h_t - p)}{\partial t} + \operatorname{div} (\rho \vec{v} h_t) = \operatorname{div} \underbrace{(\vec{v}.\tau)}_{u_i \vec{e_i}.\, \tau_{j\ell} \vec{e_j} \otimes \vec{e_\ell} = u_i \tau_{j\ell} \underbrace{\vec{e_i}.(\vec{e_j} \otimes \vec{e_\ell})}_{\vec{e_\ell}(\vec{e_i}.\vec{e_j}) = \delta_{ij}}} - \operatorname{div} \vec{q}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial (\rho h_t - p)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\ell} (\rho u_\ell h_t) = \frac{\partial}{\partial x_\ell} (u_i \tau_{i\ell}) - \frac{\partial q_\ell}{\partial x_\ell} \qquad \begin{matrix} i = 1, 2, 3 \\ \ell = 1, 2, 3 \end{matrix}$$

Remarque

$$h_t = h + \frac{v^2}{2} = h + \frac{u_i u_i}{2}$$

$$= e + \frac{p}{\rho} + \frac{u_i u_i}{2}$$

énergie interne ↓ , ↓ énergie cinétique

$$\Rightarrow \rho h_t - p = \rho e + \rho \frac{u_i u_i}{2} = \rho \left[e + \frac{u_i u_i}{2} \right]$$

$$= \rho E$$

Remarque : $\vec{q} = -\kappa(T)\,\mathrm{grad}\,T$

loi de comportement thermique de Fourier.

T : température statique
κ : conductivité thermique

$$\Leftrightarrow \quad q_\ell = -\kappa(T)\frac{\partial T}{\partial x_\ell}$$

3.4. Loi d'Etat

Loi d'état des gaz thermodynamiquement parfait

volume, nbre de mole

$PV = n\mathcal{R}T$

$\mathcal{R}$: cte des gaz universelle = 8.314 J/mole/K

$\frac{n}{V} = \frac{\rho}{\mathcal{M}}$ $\quad \mathcal{R}_g = \frac{\mathcal{R}}{\mathcal{M}}$

$\mathcal{M}$: masse molaire = 28.96 kg kmol^{-1} pour l'air

$$P = \rho R_g T$$

valable pour l'air quand $100 < T < 1200$ K

$$h = c_p(T)T$$
$$e = c_v(T)T$$

avec $c_p = \frac{\partial h}{\partial T}\Big|_p$ chaleur spécifique à $p = c^{te}$

$c_v = \frac{\partial e}{\partial T}\Big|_\rho$ chaleur spécifique à $\rho = c^{te}$

Si on considère que le gaz est caloriquement parfait alors

$h = c_pT$; $e = c_vT$ $\qquad R_g = 287.04\ m^2\,s^{-2}\,K^{-1}$

$c_p - c_v = R_g \quad \Rightarrow \quad c_p = \frac{\gamma}{\gamma-1}R_g$ $\qquad$ (c_p varie de 15 % pour $100 < T < 1200$ K

$\gamma = \frac{c_p}{c_v} = c^{te}$

$\gamma = 1.4$ pour l'air

Enfin, le calcul de la viscosité dynamique $\mu(T)$ et du coefficient de conductivité thermique $\kappa(T)$ sont calculés via les lois empiriques de Sutherland.

$$\mu(T) = \mu_{273}\left(\frac{T}{273.15}\right)^{3/2}\frac{110.4 + 273.15}{110.4 + T}$$

$$\kappa(T) = \kappa_{273}\,\frac{\mu(T)}{\mu_{273}}\left[1 + 0.00023\,(T - 273.15)\right]$$

avec $\mu_{273} = 17.11\ 10^6$ Pa.s

$\kappa_{273} = 0.0242$ W m^{-1} K^{-1}

(6')

Thermodynamique de l'air:

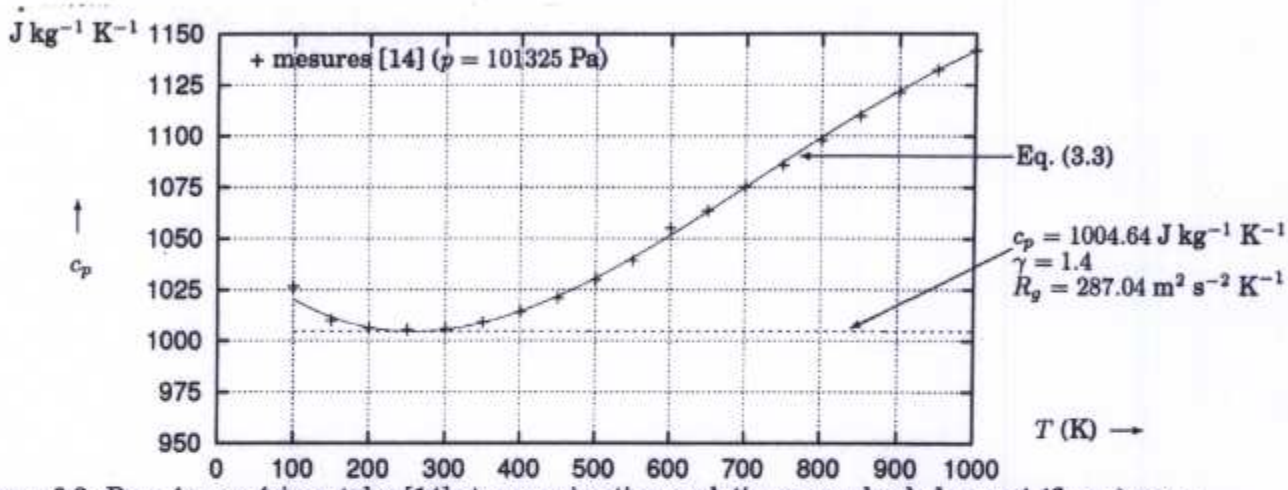


Figure 3.2: Données expérimentales [14] et approximation analytique pour la chaleur spécifique à pression constante c_p de l'air

Approximation [$\mathcal{Z} = 1$; $c_p = c_p(T)$]

Pour des températures $T \leq 1000$ K l'approximation $\mathcal{Z} \cong 1$ est très satisfaisante. On traitera ainsi l'air comme si c'était une substance pure de masse molaire $\mathcal{M}_{\text{air}} \cong 28.96$ kg kmol^{-1} $\Longleftrightarrow$ $R_g = 287.04$ m^2 s^{-2} K^{-1}. C'est un résultat classique de la thermodynamique (*cf.* §B.2) que:

$$p = \rho R_g T \Longrightarrow h = h(T) \;\; ; \;\; e = e(T) \;\; ; \;\; c_p(T) - c_v(T) = R_g \tag{3.2}$$

ie. que pour un gaz thermodynamiquement parfait l'enthalpie h et l'énergie interne e ne dépendent que de la température (sont indépendantes de la pression), et la différence des chaleur spécifiques à pression constant c_p et à volume constant c_v est égale à R_g.

Les valeurs mesurées de c_p en fonction de la température peuvent être approchées [64] pour $T \leq 1000$ K par une fonction polynomiale de T (Fig. 3.2):

$$c_p(T) \;\; = \;\; R_g(A_0 + A_1 T + A_2 T^2 + A_3 T^3 + A_4 T^4) \tag{3.3}$$

avec

$$T \leq 1000\,\text{K} \; : \; A_0 = 3.657 \; ; \; A_1 = -\frac{1.33736}{10^3} \; ; \; A_2 = \frac{3.29421}{10^6} \; ; \; A_3 = -\frac{1.91142}{10^9} \; ; \; A_4 = \frac{0.275462}{10^{12}} \tag{3.4}$$

A partir de cette formulation de c_p on peut obtenir les expressions suivantes pour l'enthalpie et l'entropie (*cf.* §B.2):

$$\begin{aligned} h(T) \;\; &= \;\; h_{\text{ISA}} + \int_{T_{\text{ISA}}}^{T} c_p(T')dT' \\ &= \;\; H_0 + R_g(A_0 T + \tfrac{1}{2}A_1 T^2 + \tfrac{1}{3}A_2 T^3 + \tfrac{1}{4}A_3 T^4 + \tfrac{1}{5}A_4 T^5) \end{aligned} \tag{3.5}$$

$$\begin{aligned} s(T,p) - s_{\text{ISA}} \;\; &= \;\; \int_{T_{\text{ISA}}}^{T} \frac{c_p(T')}{T'} dT' - R_g \ln \frac{p}{p_{\text{ISA}}} \\ &= \;\; S_0 + R_g(A_0 \ln T + A_1 T + \tfrac{1}{2}A_2 T^2 + \tfrac{1}{3}A_3 T^3 + \tfrac{1}{4}A_4 T^4) - R_g \ln \frac{p}{p_{\text{ISA}}} \end{aligned} \tag{3.6}$$

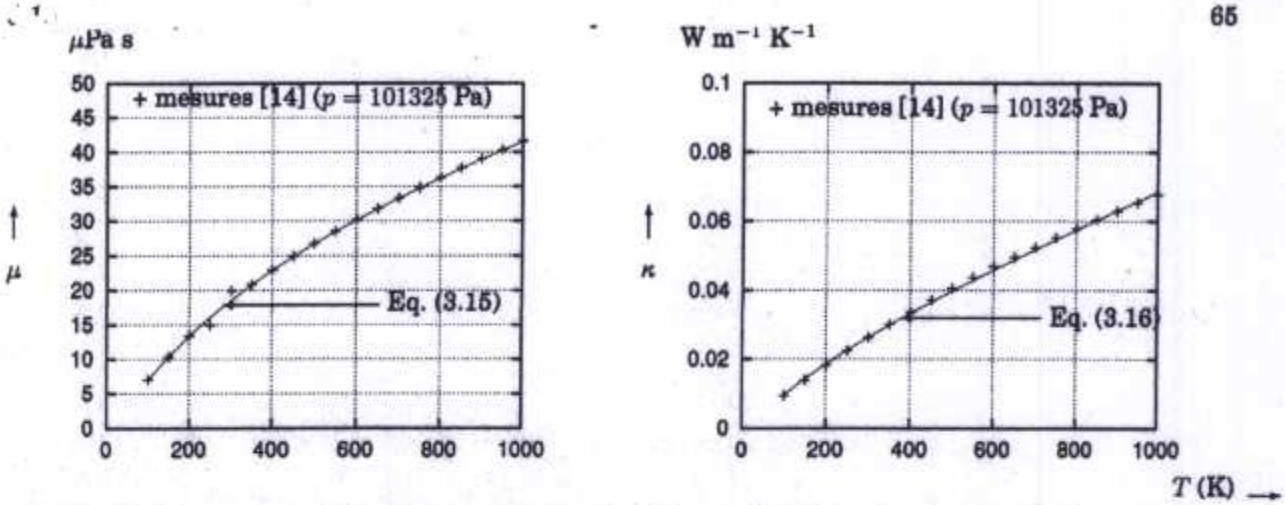


Figure 3.5: Comparaison de données expérimentales [14] avec la loi de Sutherland modifiée pour μ et κ

3.1.3 Nombre de Prandtl

Le nombre de Prandtl est une propriété thermodynamique du milieu considéré:

$$Pr = \frac{\mu c_p}{\kappa} \tag{3.17}$$

Dans le cadre de l'approximation $Z = 1$ le nombre de Prandtl est fonction de la température ($Pr = Pr(T)$). Cependent la variation de Pr avec T est relativement faible (Fig. 3.6). C'est pourquoi, dans plusieurs études l'approximation Pr = const est faite. Pour l'air $Pr \cong 0.7$ est une bonne approximation lorsque $T \in [100, 1000]$ K (Fig. 3.6).[5]

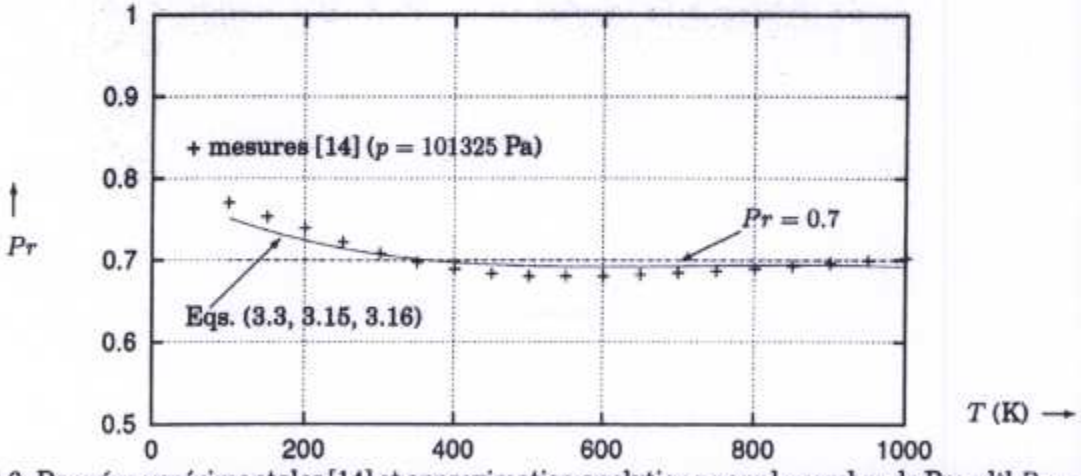


Figure 3.6: Données expérimentales [14] et approximation analytique pour le nombre de Prandtl $Pr = \frac{\mu c_p}{\kappa}$ de l'air

[5] l'approximation $Pr \cong$ const est beaucoup moins bonne si on fait l'approximation $c_p \cong$ const tout en utilisant des lois précises pour μ et κ Eqs. (3.15, 3.16); dans le cadre de cette approximation ($c_p \cong$ const, $Pr \cong$ const), il convient de calculer μ par la loi de Sutherland, et d'obtenir κ par les 3 autres quantités μ, c_p, et Pr ($\kappa = \frac{\mu c_p}{Pr}$)

4/ Moyenne de Reynolds (d'ensemble) - Moyenne de Favre

4.1 Moyenne d'ensemble.

Soient N réalisations identiques d'une même expérience, et $f_n(\vec{x}, t)$ le champ d'une fonction quelconque obtenue pour chaque réalisation

$$F_{ens}(\vec{x}, t) = \lim_{N \to +\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f_n(\vec{x}, t)$$

On admettra l'existence et l'unicité des moyennes d'ensemble pour un écoulement turbulent

Remarque : La moyenne d'ensemble peut-être également définie à l'aide de la densité de probabilité d'une variable aléatoire réelle absolument continue

⇒ les propriétés de la moyenne d'ensemble correspondent aux propriétés des intégrales.

4-2 Moyenne temporelle

$$F_{tmp}(\vec{x}) = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_{t}^{t+T} f(\vec{x}, t)\, dt$$

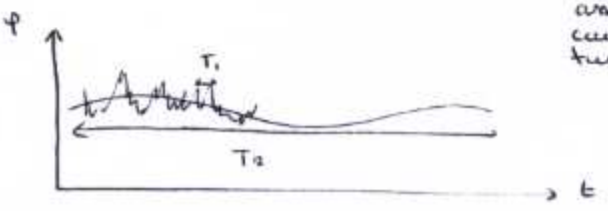
l'opérateur moyenne temporelle possède les mêmes propriétés que l'opérateur moyenne d'ensemble.

Remarque : Lorsque ces 2 moyennes sont égales ; on parle d'hypothèse ergodique.
C'est le cas pour un écoulement stationnaire.
où il est équivalent du point de vue statistique de considérer la répétition d'expériences semblables (moy d'ens) ou bien une même expérience indéfiniment prolongée (moy temporelle).

Ainsi en pratique, pour un écoulement stationnaire, on réalise une moyenne temporelle, où T est tel que $T_1 \ll T \ll T_2$

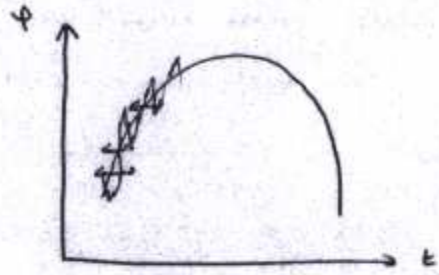
T_1 : temps caractéristique associé à la fréquence caractéristique de la turbulence

T_2 : temps caractéristique variations lentes



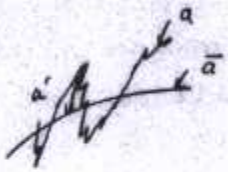
Dans le cas d'écoulement vraiment instationnaire, soit on peut faire une moyenne d'ensemble : c'est le cas en turbomachine,

Soit on découpe le signal en petits intervalles dans lesquels on fera une moyenne temporelle, chaque intervalle correspondra à un instant t



4.3 Moyenne de Reynolds (ou d'ensemble) - Propriétés

On notera $\overline{(\cdot)}$ la moyenne de Reynolds.



$$a = \bar{a} + a'$$

↑ grandeur instantanée ; ↑ moyenne ; ↑ fluctuation

$$b = \bar{b} + b'$$

$$\bar{\bar{a}} = \bar{a}$$

$$\overline{a'} = 0$$

$$\overline{a+b} = \bar{a} + \bar{b}$$

$$\overline{ab} = \bar{a}\bar{b} + \overline{a'b'}$$

$$\overline{\frac{\partial a}{\partial t}} = \frac{\partial \bar{a}}{\partial t}$$

$$\overline{\frac{\partial a}{\partial x}} = \frac{\partial \bar{a}}{\partial x}$$

$$\overline{abc} = \bar{a}\,\overline{b'c'} + \bar{a}\bar{b}\bar{c} + \overline{a'b'c'} + \bar{b}\,\overline{a'c'} + \bar{c}\,\overline{a'b'}$$

Remarque : . Ecoulement turbulent statistiquement 2-D (ou axisymétrique)

ex : selon $\vec{e}_3$ $\quad \bar{w} = 0 \quad ; \quad \overline{u'w'} = \overline{v'w'} = 0$

$\overline{w'w'} \neq 0$

selon $\vec{e}_\theta$ $\quad \bar{u}_\theta = 0 \qquad \overline{u_r u_\theta} = \overline{u_r u_\theta} = 0$

$\overline{u_\theta u_\theta} \neq 0$

4-4 Moyenne d'ensemble pondérée masse

Dans le cadre de l'étude d'écoulement à masse volumique variable (compressible) l'utilisation de la moyenne de Reynolds s'avère relativement compliquée.

⇒ Favre (1965) a introduit la moyenne d'ensemble pondérée masse:

$$\varphi = \tilde{\varphi} + \varphi''$$ ← décomposition de Favre

$\tilde{\varphi}$: moyenne de Favre ; φ'' : fluctuations selon Favre

avec par définition $\tilde{\varphi} = \dfrac{\overline{\rho\varphi}}{\overline{\rho}}$

Par contre pour la masse volumique ρ et la pression statique P, on garde la moyenne de Reynolds.

$$\rho = \bar{\rho} + \rho' \quad \text{avec } \overline{\rho'} = 0$$
$$P = \bar{P} + P' \quad \text{et } \overline{P'} = 0$$

Conséquences :

$$\rho\varphi = \rho\tilde{\varphi} + \rho\varphi''$$

$$\Rightarrow \overline{\rho\varphi} = \overline{\rho\tilde{\varphi}} + \overline{\rho\varphi''}$$

$\overline{\rho\tilde{\varphi}} = \overline{\rho}\,\tilde{\varphi}$ car bien évidemment $\tilde{\tilde{\varphi}} = \tilde{\varphi}$

$$\overline{\rho\tilde{\varphi}} = \overline{\rho}\,\tilde{\varphi} = \overline{\rho}\,\frac{\overline{\rho\varphi}}{\overline{\rho}} = \overline{\rho\varphi}$$

et $\tilde{\varphi} = \dfrac{\overline{\rho\varphi}}{\overline{\rho}}$ $\Rightarrow$ $\overline{\rho\varphi} = \overline{\rho}\,\tilde{\varphi} + \overline{\rho\varphi''}$

$$\Rightarrow \boxed{\overline{\rho\varphi''} = 0}$$

par contre $\varphi'' = \varphi - \tilde{\varphi}$

$$\overline{\varphi''} = \overline{\varphi} - \tilde{\varphi} \neq 0$$

$$\overline{\varphi''} = \overline{\varphi} - \frac{\overline{\rho\varphi}}{\overline{\rho}} \quad \text{car } \tilde{\varphi} = \frac{\overline{\rho\varphi}}{\overline{\rho}}$$

$$= \frac{\overline{\rho}\,\overline{\varphi} - \overline{\rho\varphi}}{\overline{\rho}}$$

or $\overline{\rho\varphi} = \overline{(\bar{\rho}+\rho')(\tilde{\varphi}+\varphi'')} = \bar{\rho}\tilde{\varphi} + \bar{\rho}\overline{\varphi''} + \overline{\rho'}\tilde{\varphi} + \overline{\rho'\varphi''}$ ($\overline{\rho'} = 0$)

$$= \bar{\rho}\left[\tilde{\varphi} + \overline{\varphi''}\right] + \overline{\rho'\varphi''}$$

$\tilde{\varphi}$

$$\Rightarrow \overline{\varphi''} = \frac{\bar{\rho}\tilde{\varphi} - \bar{\rho}\tilde{\varphi} - \overline{\rho'\varphi''}}{\bar{\rho}}$$

$$\boxed{\overline{\varphi''} = -\frac{\overline{\rho'\varphi''}}{\bar{\rho}}}$$

Remarque : $\overline{\rho g} = \overline{(\bar{\rho}+\rho')(\tilde{g}+g'')}$

$= \bar{\rho}\tilde{g} + \overline{\rho'}\tilde{g} + \overline{\underbrace{(\bar{\rho}+\rho')}_{\rho} g''}$

$= \bar{\rho}\tilde{g} + 0 + \underbrace{\overline{\rho g''}}_{0}$

$\Rightarrow \boxed{\overline{\rho g} = \bar{\rho}\tilde{g}}$ par définition car $\tilde{g} = \frac{\overline{\rho g}}{\bar{\rho}}$

Remarque : La moyenne de Reynolds et la moyenne de Favre sont strictement équivalentes. Il est plus rigoureux de parler de décomposition de Favre plutôt que de moyenne de Favre.

Remarque : $\overline{\rho T''} = 0$ ou $\overline{\rho T''} = \bar{\rho}\tilde{T''}$ par définition

$\Rightarrow \boxed{\tilde{T''} = 0}$

5/ Ecoulements incompressibles ($\rho = c^{te}$) : Equations de transport de l'écoulement moyen exactes.

On appelle écoulement "incompressible" un écoulement au sein duquel les variations de masse volumique sont négligeables.

Remarque : $d\rho \simeq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \\ \text{grad}\,\rho = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{D\rho}{Dt} = 0$

Nous allons également supposer que les variations de l'état thermodynamique sont suffisamment faibles pour pouvoir considérer $\mu = c^{te}$

or $\mu = \mu(\rho, T)$

$$d\mu = \left[\frac{\partial \mu}{\partial \rho}\right]_T d\rho + \left[\frac{\partial \mu}{\partial T}\right]_\rho dT \simeq 0$$

$\Rightarrow$ on considère que les variations de ρ et de T sont faibles.

Conséquences : Nous n'avons pas besoin de résoudre l'équation de conservation de l'énergie pour déterminer le champ de pression et de vitesse.

5.1/ Equation de conservation de la masse

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_\ell}{\partial x_\ell} = 0$$

$$\rho = c^{te} \Rightarrow \frac{\partial u_\ell}{\partial x_\ell} = 0$$

moyennons $\boxed{\frac{\partial \bar{u}_\ell}{\partial x_\ell} = 0}$

Remarque : $u_\ell = \bar{u}_\ell + u_\ell'$

$\Rightarrow u_\ell' = u_\ell - \bar{u}_\ell$

or $\frac{\partial u_\ell}{\partial x_\ell} - \frac{\partial \bar{u}_\ell}{\partial x_\ell} = 0 - 0$

$\Rightarrow \frac{\partial (u_\ell - \bar{u}_\ell)}{\partial x_\ell} = 0$

$\Leftrightarrow \boxed{\frac{\partial u_\ell'}{\partial x_\ell} = 0}$

Nous avons donc la "même" équation pour la conservation de la masse instantanée, moyennée et fluctuante. Ceci est possible car l'équation de conservation de la masse en écoulement incompressible est linéaire.

5.2 Equation de conservation de la quantité de mouvement

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i u_e}{\partial x_e} = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ie}}{\partial x_e}$$ instantanée.

moyennons $$\frac{\partial \rho \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho \overline{u_i u_e}}{\partial x_e} = -\frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + \frac{\partial \bar{\tau}_{ie}}{\partial x_e}$$

or $$\overline{u_i u_e} = \bar{u}_i \bar{u}_e + \overline{u_i' u_e'}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \rho \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho \bar{u}_i \bar{u}_e}{\partial x_e} = -\frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + \frac{\partial \left[\bar{\tau}_{ie} \boxed{-\rho \overline{u_i' u_e'}}\right]}{\partial x_e}$$

☐ terme supplémentaire qu'on appelle tenseur de Reynolds

Ce tenseur qu'on peut noter $\bar{\tau}_{ij}^t = -\rho \overline{u_i' u_j'}$ est symétrique (comme le tenseur des tenseurs visqueux)

et $$tr\left(\bar{\tau}_{ij}^t\right) = -\rho \overline{u_i' u_i'}$$

en posant $k = \frac{\overline{u_i' u_i'}}{2}$ $\Rightarrow tr\left(\bar{\tau}_{ij}^t\right) = -2\rho k$

k étant l'énergie cinétique turbulente,

en effet :

$E_c = \frac{u_i u_i}{2}$: énergie cinétique instantanée

moyennons $\bar{E}_c = \underbrace{\frac{\bar{u}_i \bar{u}_i}{2}}_{\text{énergie cinétique de l'écoulement moyen}} + \underbrace{\frac{\overline{u_i' u_i'}}{2}}_{\text{énergie cinétique turbulente notée } k}$

5.3 Loi de comportement des fluides newtoniens

$$\tau_{ij} = 2\mu D_{ij} + \lambda \cancel{\frac{\partial u_k}{\partial x_k}}^{\,0 \text{ en écoulement incompressible}} \delta_{ij} \quad ; \ \mu = cte$$

moyennons $\Rightarrow$ $\bar{\tau}_{ij} = 2\mu \bar{D}_{ij}$

avec $D_{ij} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right]$ $\Rightarrow \bar{D}_{ij} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i}\right]$

$$\Rightarrow \bar{\tau}_{ij} = \mu\left[\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i}\right]$$

Remarque : τ_{ij} ayant une formule linéaire, on a également (en écoul^t incomp^{ble})

$$\tau_{ij}' = \mu\left[\frac{\partial u_i'}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j'}{\partial x_i}\right]$$

5.4 Loi d'état des gaz thermodynamiquement parfaits

$P = \rho R_g T$; or $\rho = cte$ et peu de variation de température

$\Rightarrow R_g = \frac{\gamma - 1}{\gamma} c_p = cte$ $\Rightarrow \boxed{\bar{P} = \rho R_g \bar{T}}$

On considérera que le gaz est calorifiquement parfait.

Chapitre II - Ecoulements turbulents compressibles : Equation de transpot de l'écoulement moyen exactes.

On considiera les écoulements où $\rho \neq cte$, on utilisera donc la moyenne de Favre :

$$\alpha = \tilde{\alpha} + \alpha'' \quad ; \quad \tilde{\alpha} = \frac{\overline{\rho\alpha}}{\bar{\rho}}$$

avec $p = \bar{p} + p'$
$\rho = \bar{\rho} + \rho'$

propriétés : $\overline{\rho'} = \overline{p'} = 0$

$\overline{\rho\alpha''} = 0 \qquad \tilde{\alpha''} = 0$

$\overline{\alpha''} = -\dfrac{\overline{\rho'\alpha''}}{\bar{\rho}}$

$\overline{\rho\alpha} = \bar{\rho}\tilde{\alpha}$

par contre

$\overline{\rho\alpha''\beta''} = \bar{\rho}\widetilde{\alpha''\beta''}$
$\neq 0$

car $\overline{\rho\alpha''\beta''} = \bar{\rho}\dfrac{\overline{\rho\alpha''\beta''}}{\bar{\rho}}$
$= \bar{\rho}\widetilde{\alpha''\beta''}$

1/ Conservation de la masse

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_e}{\partial x_e} = 0 \quad \text{instantanée.}$$

décomposons : $\dfrac{\partial(\bar{\rho}+\rho')}{\partial t} + \dfrac{\partial(\bar{\rho}+\rho')(\tilde{u}_e + u_e'')}{\partial x_e} = 0$ (toujours instantanée)

moyennons : $\dfrac{\partial(\overline{\bar{\rho}+\rho'})}{\partial t} + \dfrac{\partial\left[\overline{(\bar{\rho}+\rho')(\tilde{u}_e + u_e'')}\right]}{\partial x_e} = 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{\partial(\bar{\rho} + \overset{\circ}{\overline{\rho'}})}{\partial t} + \dfrac{\partial\left[\overline{\bar{\rho}\tilde{u}_e} + \overline{\rho'\tilde{u}_e} + \overline{(\bar{\rho}+\rho')u_e''}\right]}{\partial x_e} = 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \dfrac{\partial\left[\bar{\rho}\tilde{u}_e + \overset{\circ}{\overline{\rho'}}\tilde{u}_e + \overline{\rho u_e''}^{\circ}\right]}{\partial x_e} = 0$

$\Leftrightarrow \boxed{\dfrac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \dfrac{\partial[\bar{\rho}\tilde{u}_e]}{\partial x_e} = 0}$

Rq : grâce à la moyenne de Favre, nous avons la même forme par l'équation moyennée Reynolds (incompressible) et Favre (compressible)

Rq : on parle + exactement de décomposition de Favre, car on a toujours la moyenne d'ensemble.

2/ Conservation de la quantité de mouvement

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i u_e}{\partial x_e} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ie}}{\partial x_e} \quad \text{instantanée}$$

décomposons : $\dfrac{\partial(\bar{\rho}+\rho')(\tilde{u}_i + u_i'')}{\partial t} + \dfrac{\partial(\bar{\rho}+\rho')(\tilde{u}_i + u_i'')(\tilde{u}_e + u_e'')}{\partial x_e} = -\dfrac{\partial(\bar{p}+p')}{\partial x_i} + \dfrac{\partial(\bar{\tau}_{ie}+\tau_{ie}')}{\partial x_e}$

On ne peut pas décomposer simplement τ_{ie}, mais on peut admettre que pour toutes grandeurs X on a $X = \bar{X} + X'$, même si on ne peut pas l'exprimer, avec $\overline{X'} = 0$.

moyennons :

$$\frac{\partial\left(\bar{\rho}\tilde{u}_i + \overset{\circ}{\rho' u_i} + \overline{(\rho+\rho')u_i''}\right)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_e}\left[\overline{(\rho+\rho')(\tilde{u}_i\tilde{u}_e + u_i''u_e'' + \tilde{u}_i u_e'' + u_i''\tilde{u}_e)}\right]$$

$$= -\frac{\partial(\bar{p}+\overset{\circ}{p'})}{\partial x_i} + \frac{\partial(\bar{\tau}_{ie} + \overset{\circ}{\tau_{ie}'})}{\partial x_e}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial(\bar{\rho}\tilde{u}_i + \overset{\circ}{\rho u_i''})}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_e}\left[\bar{\rho}\tilde{u}_i\tilde{u}_e + \underbrace{\overline{(\rho+\rho')u_i''u_e''}}_{\overline{\rho u_i''u_e''}} + \tilde{u}_i\overline{(\rho+\rho')u_e''} + \tilde{u}_e\overline{(\rho+\rho')u_i''}\right]$$

$$= -\frac{\partial\bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial\bar{\tau}_{ie}}{\partial x_e}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial\bar{\rho}\tilde{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_e}\left[\bar{\rho}\tilde{u}_i\tilde{u}_e + \bar{\rho}\widetilde{u_i''u_e''} + \tilde{u}_i\overset{\circ}{\overline{\rho u_e''}} + \tilde{u}_e\overset{\circ}{\overline{\rho u_i''}}\right] = -\frac{\partial\bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial\bar{\tau}_{ie}}{\partial x_e}$$

en effet $\overline{\rho u_i''u_e''} = \bar{\rho}\,\dfrac{\overline{\rho u_i''u_e''}}{\bar{\rho}} = \bar{\rho}\,\widetilde{u_i''u_e''}$ (par définition de la moyenne de Favre)

Finalement, nous avons :

$$\frac{\partial\bar{\rho}\tilde{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{\rho}\tilde{u}_i\tilde{u}_e)}{\partial x_e} = -\frac{\partial\bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial\left[\bar{\tau}_{ie} \boxed{-\bar{\rho}\widetilde{u_i''u_e''}}\right]}{\partial x_e}$$

On remarque, que la forme de l'équation de conservation de la quantité de mouvement en écoulement compressible est équivalente à la forme en écoulement incompressible

□ est le tenseur de Reynolds.

$\bar{\tau}_{ij}^{t} = -\bar{\rho}\widetilde{u_i''u_j''}$ qui est symétrique

et $tr\left(\bar{\tau}_{ij}^{t}\right) = -\bar{\rho}\widetilde{u_i''u_j''}$

$= -2\bar{\rho}k$ avec $\boxed{k = \dfrac{\widetilde{u_i''u_j''}}{2}}$

3. Conservation de l'Energie totale

instantanée : $\frac{\partial \rho H_t - p}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_e H_t}{\partial x_e} = \frac{\partial}{\partial x_e}(\tau_{ie} u_i) - \frac{\partial q_e}{\partial x_e}$

moyennons terme à terme : $\rho H_t - p = \rho e + p + \rho \frac{u_i u_i}{2} - p$

- $\overline{\rho H_t - p} = \overline{(\bar\rho + \rho')(\tilde e + e'')} + \frac{1}{2}\overline{(\bar\rho + \rho')\underbrace{(\tilde u_i + u_i'')(\tilde u_i + u_i'')}_{\tilde u_i \tilde u_i + 2\tilde u_i u_i'' + u_i'' u_i''}}$

$= \bar\rho \tilde e + \cancel{\overset{\circ}{\rho'}\tilde e} + \cancel{\bar\rho e''} + \frac{1}{2}\left(\bar\rho \tilde u_i \tilde u_i + \cancel{\overset{\circ}{\rho'}\tilde u_i \tilde u_i} + 2\cancel{\overset{\circ}{\rho' u_i''}}\tilde u_i + \underbrace{\overline{\rho u_i'' u_i''}}_{\bar\rho \overline{u_i'' u_i''}}\right)$

$= \bar\rho \tilde e + \frac{1}{2}\bar\rho \tilde u_i \tilde u_i + \frac{1}{2}\bar\rho \widetilde{u_i'' u_i''}$

$= \underbrace{\bar\rho \tilde e + \frac{1}{2}\bar\rho \tilde u_i \tilde u_i}_{\bar\rho\left[\tilde e + \frac{1}{2}\tilde u_i \tilde u_i\right]} + \bar\rho k$ puisque $k = \frac{\widetilde{u_i'' u_i''}}{2}$

posons $\tilde H_t = \underbrace{\tilde h + \frac{\tilde u_i \tilde u_i}{2}}_{\tilde H_t} + k$

avec $\tilde h = \tilde e + \frac{\bar p}{\bar\rho}$

$\Rightarrow \tilde H_t = \tilde e + \frac{\bar p}{\bar\rho} + \frac{\tilde u_i \tilde u_i}{2} + k$

et $\bar\rho \tilde H_t - \bar p = \bar\rho \tilde e + \cancel{\bar p} - \cancel{\bar p} + \bar\rho \frac{\tilde u_i \tilde u_i}{2} + \bar\rho k$

$= \bar\rho \tilde H_t - \bar p + \bar\rho k$

donc $\overline{\rho H_t - p} = \bar\rho \tilde H_t - \bar p$

- $\overline{\rho H_t u_e} = \overline{\left(\rho e + p + \rho \frac{u_i u_i}{2}\right) u_e}$

$= \overline{\rho e u_e} + \overline{p u_e} + \overline{\rho \frac{u_i u_i u_e}{2}}$

décomposons : $= \overline{(\bar\rho + \rho')\underbrace{(\tilde e + e'')(\tilde u_e + u_e'')}_{\tilde e \tilde u_e + e''\tilde u_e + \tilde e u_e'' + e'' u_e''}} + \overline{(\bar p + p')(\tilde u_e + u_e'')} + \frac{1}{2}\overline{(\bar\rho + \rho')\underbrace{(\tilde u_i + u_i'')^2}_{(\tilde u_i \tilde u_i + u_i'' u_i'' + 2\tilde u_i u_i'')}\underbrace{(\tilde u_e + u_e'')}_{(\tilde u_e + u_e'')}}$

$= \bar\rho \tilde e \tilde u_e + \cancel{\overset{\circ}{\rho'}\tilde e \tilde u_e} + \cancel{\overline{\rho e''}\tilde u_e} + \bar\rho \overline{e'' u_e''} + \bar p \tilde u_e + \cancel{p' \tilde u_e} + \bar p \overline{u_e''} + \overline{p' u_e''}$

$+ \frac{1}{2}\Big[\bar\rho \tilde u_i \tilde u_i \tilde u_e + \cancel{\overset{\circ}{\rho'}\tilde u_i \tilde u_i \tilde u_e} + \cancel{\overline{\rho u_e''}\tilde u_i \tilde u_i} + \overline{\rho u_i'' u_i'' u_e''} + \overline{\rho u_i'' u_i''}\tilde u_e + 2\cancel{\overset{\circ}{\rho u_i''}}\tilde u_i \tilde u_e + 2\tilde u_i \overline{\rho u_i'' u_e''}\Big]$

$$= \bar{\rho}\tilde{e}\tilde{u}_e + \bar{\rho}\widetilde{e''u_e''} + \bar{\rho}\tilde{u}_e + \bar{\rho}\overline{u_e''} + \overline{\rho' u_e''} + \frac{1}{2}\Big[\bar{\rho}\widetilde{u_i u_i u_e} + \bar{\rho}\widetilde{u_i'' u_i'' u_e''} + \bar{\rho}\widetilde{u_i'' u_i'' \tilde{u}_e} + 2\bar{\rho}\widetilde{u_i'' u_e''}\tilde{u}_i\Big]$$

$$= \bar{\rho}\tilde{u}_e\Big[\underbrace{\underbrace{\tilde{e} + \frac{\bar{p}}{\bar{\rho}} + \frac{\tilde{u}_i\tilde{u}_i}{2}}_{\tilde{R}_t = \tilde{R} + \frac{\tilde{u}_i\tilde{u}_i}{2}} + \underbrace{\frac{\widetilde{u_i'' u_i''}}{2}}_{k}}_{\tilde{R}_t}\Big] + \bar{\rho}\widetilde{e''u_e''} + \underbrace{\bar{\rho}\overline{u_e''} + \overline{\rho' u_e''}}_{\overline{\rho u_e''}} + \bar{\rho}\frac{\widetilde{u_i'' u_i'' u_e''}}{2} + \bar{\rho}\widetilde{u_i u_i'' u_e''}$$

$$= \bar{\rho}\tilde{R}_t\tilde{u}_e + \bar{\rho}\widetilde{e''u_e''} + \overline{\rho u_e''} + \bar{\rho}\frac{\widetilde{u_i'' u_i'' u_e''}}{2} + \bar{\rho}\widetilde{u_i u_i'' u_e''}$$

- $\overline{\tau_{ie} u_i} = \overline{(\tilde{u}_i + u_i'')\tau_{ie}} = \tilde{u}_i\overline{\tau_{ie}} + \overline{u_i''\tau_{ie}}$
- $\bar{q}_e = \overline{(\bar{q}_e + q_e')} = \bar{q}_e + 0$.

D'où finalement : $\dfrac{\partial \overline{\rho R_t - p}}{\partial t} + \dfrac{\partial \overline{\rho u_e R_t}}{\partial x_e} = \dfrac{\partial \overline{\tau_{ie} u_i}}{\partial x_e} - \dfrac{\partial \bar{q}_e}{\partial x_e}$ s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\bar{\rho}\tilde{R}_t - \bar{p}\right) + \frac{\partial}{\partial x_e}\left[\bar{\rho}\tilde{R}_t\tilde{u}_e + \bar{\rho}\widetilde{e''u_e''} + \overline{\rho u_e''} + \bar{\rho}\frac{\widetilde{u_i'' u_i'' u_e''}}{2} + \bar{\rho}\widetilde{u_i u_i'' u_e''}\right]$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_e}\left[\overline{\tau_{ie}}\tilde{u}_i + \overline{u_i''\tau_{ie}}\right] - \frac{\partial \bar{q}_e}{\partial x_e}$$

Remarque : $\rho R = \rho e + p$

$\Leftrightarrow (\bar{\rho} + \rho')(\tilde{R} + R'') = (\bar{\rho} + \rho')(\tilde{e} + e'') + (\bar{p} + p')$

$\Leftrightarrow \bar{\rho}\tilde{R} + \rho'\tilde{R} + \rho R'' = \bar{\rho}\tilde{e} + \rho'\tilde{e} + \rho e'' + \bar{p} + p'$

or $\bar{\rho}\tilde{R} = \bar{\rho}\tilde{e} + \bar{p}$

$\Rightarrow \rho'\tilde{R} + \rho R'' = \rho'\tilde{e} + \rho e'' + p'$

$\Rightarrow \rho R'' = -\rho'\tilde{R} + \rho'\tilde{e} + \rho e'' + p'$

multiplions par u_e'' : $\rho R'' u_e'' = -\rho' u_e''\tilde{R} + \rho' u_e''\tilde{e} + \rho e'' u_e'' + p' u_e''$

moyennons : $\overline{\rho R'' u_e''} = -\overline{\rho' u_e''}\tilde{R} + \overline{\rho' u_e''}\tilde{e} + \underbrace{\overline{\rho e'' u_e''}}_{\bar{\rho}\overline{e'' u_e''}} + \overline{p' u_e''}$

or nous savons que $\overline{\alpha''} = -\dfrac{\overline{\rho'\alpha''}}{\bar{\rho}} \Rightarrow \bar{\rho}\overline{\alpha''} = -\overline{\rho'\alpha''}$

d'où $\overline{\rho R'' u_e''} = \bar\rho \overline{u_e'' \tilde R} - \bar\rho \overline{u_e''} \tilde e + \bar\rho \widetilde{e'' u_e''} + \overline{p' u_e''}$

$= \bar\rho \overline{u_e''} \underbrace{(\tilde R + \tilde e)}_{\tilde\rho} + \bar\rho \widetilde{e'' u_e''} + \overline{p' u_e''}$

$= \bar\rho \overline{u_e''} + \rho' u_e'' + \bar\rho \widetilde{e'' u_e''}$

$= \overline{\rho u_e''} + \bar\rho \widetilde{e'' u_e''}$

⊛

Ainsi, nous pourrons réécrire l'équation de l'énergie totale moyennée exacte.

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\bar\rho \tilde R_t - \bar p\right] + \frac{\partial}{\partial x_e}\left[\bar\rho \widetilde{u_e} \tilde R_t\right] = \frac{\partial}{\partial x_e}\Big[-\underbrace{(\bar\rho \widetilde{e'' u_e''} + \overline{p u_e''})}_{\overline{\rho R'' u_e''}} - \bar\rho \frac{\widetilde{u_i'' u_i'' u_e''}}{2} - \bar\rho \tilde u_i \widetilde{u_i'' u_e''} + \overline{\tau_{ie}} \tilde u_i + \overline{u_i'' \tau_{ie}} - \bar q_e\Big]$$

$\overline{\rho R''u_e''}$

or $\tilde R_t = \breve R_t + k$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\bar\rho \breve R_t - \bar p\right) + \dfrac{\partial}{\partial x_e}\left(\bar\rho \widetilde{u_e} \breve R_t\right) + \overbrace{\dfrac{\partial}{\partial t}(\bar\rho k) + \dfrac{\partial}{\partial x_e}\left(\bar\rho \widetilde{u_e} k\right)}^{\frac{\overline{Dk}}{Dt}} \\ = \dfrac{\partial}{\partial x_e}\Big[-\underbrace{\bar\rho \widetilde{R'' u_e''}}_{\text{flux de chaleur turbulent}} - \underbrace{\bar q_e}_{\text{(flux de chaleur moléculaire)}} - \bar\rho \dfrac{\widetilde{u_i'' u_i'' u_e''}}{2} - \bar\rho \widetilde{u_i u_i'' u_e''} + \overline{\tau_{ie} u_i} + \overline{u_i'' \tau_{ie}}\Big] \end{cases}$$

Donc la modélisation de l'équation de l'énergie totale sera directement liée à la modélisation de l'équation de conservation de l'énergie cinétique turbulente k. L'identification des termes sera faite après avoir étudié l'équation de k en écoulement compressible (chap. 5, Eq 2, p. 44)

⊛ autre démonstration (+ simple) en considérant $R = \tilde R + R''$

$\overline{\rho R_t - p} = \overline{(\bar\rho + \rho')\left(\tilde R + R'' + \frac{u_i u_i}{2}\right) - (\bar p + p')} = \bar\rho \tilde R + \cancel{\overline{\rho R''}} + \bar\rho \frac{\widetilde{u_i u_i}}{2} + \bar\rho \frac{\widetilde{u_i'' u_i''}}{2} - \bar p$

$= \bar\rho\Big[\underbrace{\tilde R + \frac{\widetilde{u_i u_i}}{2}}_{\tilde R_t} + \underbrace{\frac{\widetilde{u_i'' u_i''}}{2}}_{k}\Big] - \bar p = \bar\rho\left[\breve R_t + k\right] - \bar p = \bar\rho \tilde R_t - \bar p$

$\overline{\rho R_t u_e} = \overline{(\bar\rho + \rho')\left(\tilde R + R'' + \frac{u_i u_i}{2}\right)(\tilde u_e + u_e'')} = \overline{(\bar\rho + \rho')\Big[\tilde R \tilde u_e + \tilde R u_e'' + R'' \tilde u_e + R'' u_e'' + \frac{\widetilde{u_i u_i}}{2}\tilde u_e + \frac{u_i'' u_i'' u_e''}{2} + \tilde u_i \frac{\widetilde{u_i'' u_e''}}{2} + \tilde u_e \frac{\widetilde{u_i'' u_i''}}{2}\Big]}$

$= \bar\rho \tilde R \tilde u_e + \bar\rho \widetilde{R'' u_e''} + \bar\rho \frac{\widetilde{u_i u_i}}{2}\tilde u_e + \bar\rho \frac{\widetilde{u_i'' u_i'' u_e''}}{2} + 2\tilde u_i \bar\rho \frac{\widetilde{u_i'' u_e''}}{2} + \tilde u_e \bar\rho \frac{\widetilde{u_i'' u_i''}}{2}$

$= \tilde u_e\Big[\bar\rho\Big(\underbrace{\tilde R + \frac{\widetilde{u_i u_i}}{2} + \frac{\widetilde{u_i'' u_i''}}{2}}_{\tilde R_t}\Big)\Big] + \bar\rho \frac{\widetilde{u_i u_i u_e''}}{2} + \bar\rho \tilde u_i \widetilde{u_i'' u_e''} + \bar\rho \widetilde{R'' u_e''}$

$= \bar\rho \tilde R_t \tilde u_e + \bar\rho \widetilde{R'' u_e''} + \bar\rho \frac{\widetilde{u_i u_i u_e''}}{2} + \bar\rho \tilde u_i \widetilde{u_i'' u_e''}$

6// Loi de comportement des Fluides Newtoniens_

$$\tau_{ie} = 2\mu D_{ie} + \lambda \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ie} \qquad \text{or} \quad \mu = \mu(T), \quad \lambda = \lambda(T)$$

Donc, de même que pour la loi de comportement thermique de Fourier, on peut écrire de façon exacte:

$$\overline{\tau_{ie}} = \lambda(\tilde{T}) \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial x_k} \delta_{ie} + \mu(\tilde{T}) \left[\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_e} + \frac{\partial \tilde{u}_e}{\partial x_i} \right]$$

$$+ \left\{ \overline{\left[\lambda(\tilde{T}+T'') - \lambda(\tilde{T})\right] \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial x_k}} \delta_{ie} + \overline{\left[\mu(\tilde{T}+T'') - \mu(\tilde{T})\right] \left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_e} + \frac{\partial \tilde{u}_e}{\partial x_i} \right)} \right.$$

$$\left. + \overline{\lambda(\tilde{T}+T'') \frac{\partial u_k''}{\partial x_k}} \delta_{ie} + \overline{\mu(\tilde{T}+T'') \left(\frac{\partial u_i''}{\partial x_e} + \frac{\partial u_e''}{\partial x_i} \right)} \right\}$$

Chapitre III — **Modélisation Statistique de la Turbulence :** Ecoulement incompressible à haut nbre de Reynolds

III - 1 Classification

Afin de simplifier, nous allons considérer les équations de Navier-Stokes en écoulement incompressible.

Le système à résoudre est le suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho \bar{u}_e}{\partial x_e} = 0 & \leftarrow \text{conservation de la masse} \\ \dfrac{\partial \rho \bar{u}_i}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x_e}(\rho \bar{u}_i \bar{u}_e) = -\dfrac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \dfrac{\partial}{\partial x_e}\left[\bar{\tau}_{ie} \boxed{- \rho \overline{u_i' u_e'}}\right] & \leftarrow \text{qdm} \end{cases}$$

avec $\bar{\tau}_{ie} = \mu \left[\dfrac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_e} + \dfrac{\partial \bar{u}_e}{\partial x_i}\right] + 0$ ↑ en écoulement incompressible

Ainsi nous avons 4 équations, 10 inconnues $(\bar{u}_i, \bar{p}, -\rho \overline{u_i' u_e'})$ $3 + 1 + 6$

En effet, les équations de conservation de la qdm (le terme convectif) étant non linéaire, le fait de les moyenner ⇒ une perte d'information qui se traduit par l'apparition d'un terme supplémentaire : le tenseur de Reynolds, qui traduit l'influence de la turbulence sur le mouvement moyen.

Le problème de fermeture de la turbulence statistique consiste donc à modéliser le tenseur de Reynolds.

Parmi les modèles de fermeture statistiques de la turbulence, on distingue :

a) - les modèles à viscosité tourbillonnaire (eddy-viscosity)

exemple : les modèles à 2 équations de transport de type k-ε.

Ces modèles, principalement le modèle k-ε, sont les plus utilisés en milieu industriels, malgré leurs nombreux inconvénients.

Ces modèles introduisent une grandeur ν_T non physique c'est Boussinesq (1877) qui fut le premier à introduire ce concept

Nous ne verrons pas les modèles à zéro équation comme la longueur de mélange introduite par Prandtl (en 1925) ou à 1 équation (Prandtl, 1945)

- Les modèles au 2nd ordre (second-moment-closure) qui résolvent les 6 équations de transport du tenseur de Reynolds. Ces modèles appelés RST (Reynolds-stress-closure) ou modèles aux tensions de Reynolds sont les modèles les plus avancés. C'est Rotta (1951) qui les a introduit.

Les modèles de turbulence statistique ont comme principal inconvénient, d'être incapable de prendre en compte l'instationnarité propre à la turbulence (fréquence très élevée), contrairement aux modèles de résolution direct (DNS) ou modèles aux grandes échelles (LES = Large-Eddy-Simulation).

- La DNS résout directement les équations de Navier Stokes, puis effectue une moyenne des résultats ⇒ accès à toutes les grandeurs. pb: maillage très fin → kolmogorov échelles
- La LES fait une DNS sur les macro-échelles et utilise une modélisation statistique pour les plus petites échelles ⇒ maillage beaucoup plus grossier que la DNS.

Par contre les modèles statistiques encore appelés RANS (Reynolds-Averaged Navier-Stokes) peuvent simuler des écoulements instationnaire où l'instationnarité est connue : URANS (U = unsteady)

ex: . écoulement dans les turbomachines.
. choc-oscillant grâce à un signal de pression aval imposé

Remarque : Il existe des auteurs qui font des URANS "sans instationnarité connue imposé en condition limite" et qui "trouve" une instationnarité de la turbulence. ⚠ ils ont certainement un schéma instable, par ex explicite avec peu de viscosité artificielle, ou bien ils utilisent un modèle RANS dans lequel, la viscosité tourbillonnaire a été involontairement limitée, puisque les effets instationnaires prédits sont périodiques et pas définition non-turbulent. ex: facté tourbillonnaire derrière 1 cylindre

Remarque : • Les approches PANS (Partial Averaged Navier-Stokes), où l'échelle de longueur de turbulence est "bouffée" permet peut-être de simuler des écoul* "vraiment" instationnaire càd non déterministe
• Les approches DES (zonales ou non) sont également actuellement en développement.
• Les approches VLES permettent d'allier les avantages des approches RANS et LES comme les approches PANS, PITM, ...

Remarque : Les modèles RANS que nous allons étudier sont des modèles de fermeture en un point.
Il existe des corélations à 2 points, où le modèle de fermeture de la turbulence tient compte de ces notions soit temporellement, soit spatialement - Ces modèles sont extrêmement coûteux et peu utilisés, en tous les cas pas en milieu industriel pour des écoulements complexes

III - 2 Modèle à 2 équations de transport k-ε (Launder-Sharma, 1974)

Le modèle statistique k-ε fait partie de la famille des modèles à viscosité tourbillonnaire, où le tenseur de Reynolds est déterminé en utilisant l'hypothèse de Boussinesq.
L'hypothèse de Boussinesq (1877), par analogie avec la loi de comportement des fluides newtonien pour les tensions visqueuses c'est à dire :

$$\bar{\tau}_{ij} = \mu \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) + 0$$

a relié linéairement le tenseur de Reynolds aux taux de déformation, c'est à dire :

$$-\rho \overline{u_i' u_j'} = \mu_T \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \rho k \delta_{ij}$$

μ_T : viscosité tourbillonnaire

terme supplémentaire nécessaire pour la cohérence avec définition de k.

dém : $k = \dfrac{\overline{u_i' u_i'}}{2}$

→ prenons la trace de l'équation de l'hypothèse de Boussinesq :

$$-\rho \overline{u_i' u_i'} = \mu_T \, 2 \underbrace{\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i}}_{=0} - \frac{2}{3} \rho k \delta_{ii}$$

car conservation de la masse moyennée

$$\Leftrightarrow \quad -\rho \overline{u_i' u_i'} = -2 \rho k$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\overline{u_i' u_i'}}{2} = k \qquad \text{O.K.}$$

Remarque : Un modèle de turbulence n'est pas une loi de comportement du fluide ⇒ 1er inconvénient de l'hypothèse de Boussinesq.

Remarque : Comme pour tous les modèles à viscosité tourbillonnaire, le problème de fermeture passe de la détermination des tenseurs de Reynolds à la détermination de la quantité μ_T

Un modèle à 2 équations de transport résout une équation pour déterminer l'échelle de vitesse de la turbulence et une équation de transport pour déterminer l'échelle de longueur de la turbulence.

On a $[v] = \sqrt{k}$

$$[L] = \ell_T = \frac{k^{3/2}}{\varepsilon}$$

(On note qu'un modèle à une équation de transport est donc incomplet).

Le modèle $k-\varepsilon$ résout une équation de transport de l'énergie cinétique turbulente k (→ on aura l'échelle de vitesse) et une équation de transport pour le taux de dissipation de l'énergie cinétique k : ε (→ on aura l'échelle de longueur).

$k = \dfrac{\overline{u_i' u_i'}}{2}$ ⇒ pour obtenir l'équation exacte pour k, il faut celle pour le tenseur de Reynolds à laquelle on prendra la demi-somme.

1/ Equation de transport exacte aux tensions de Reynolds

Cette équation est obtenue en faisant (par ex.) :

$$\overline{u_j \frac{Du_i}{Dt} + u_i \frac{Du_j}{Dt}} - \left(\bar{u}_j \frac{D\bar{u}_i}{Dt} + \bar{u}_i \frac{D\bar{u}_j}{Dt} \right)$$

1.1 Première écriture

$$\underbrace{\frac{\partial(\rho\overline{u_i'u_j'})}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\rho\overline{u_i'u_j'}\,\tilde{u}_k\right)}_{\text{convection } C_{ij}}=\underbrace{-\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\rho\overline{u_i'u_j'u_k'}+\overline{p'u_j'}\delta_{ik}+\overline{p'u_i'}\delta_{jk}\right)}_{\text{diffusion turbulente } d_{ij}^T=d_{ij}^v+d_{ij}^p}$$

dérivée particulaire de $\overline{u_i'u_j'}$

transport diffusif dû aux fluctuations de vitesse et de pression

$$+\underbrace{\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\overline{u_j'\tau_{ik}'}+\overline{u_i'\tau_{jk}'}\right)}_{\text{diffusion visqueuse moléculaire } d_{ij}^?}+\underbrace{\overline{p'\left(\frac{\partial u_j'}{\partial x_i}+\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}\right)}}_{\text{terme de redistribution } \Phi_{ij}}$$

transport diffusif dû aux tensions visqueuses

corrélation pression-déformation $\left(=2\overline{p'D_{ij}'}\right)$ qui s'annule par contraction ($\Phi_{ii}=0$) $\Rightarrow$ réalise une redistribution de l'énergie cinétique turbulente sur les tensions normales ($\overline{u'u'}, \overline{v'v'}, \overline{w'w'}$) sans modifier k (puisque $\Phi_{ii}=0$)

$$+\underbrace{\left(-\rho\overline{u_i'u_k'}\frac{\partial\tilde{u}_j}{\partial x_k}-\rho\overline{u_j'u_k'}\frac{\partial\tilde{u}_i}{\partial x_k}\right)}_{\text{Production } P_{ij}}-\underbrace{\left(\overline{\tau_{jk}'\frac{\partial u_i'}{\partial x_k}}+\overline{\tau_{ik}'\frac{\partial u_j'}{\partial x_k}}\right)}_{\text{dissipation } \rho\varepsilon_{ij}} \qquad (1)$$

Production P_{ij} : action du gradient de vitesse moyenne sur le champ turbulent.

dissipation $\rho\varepsilon_{ij}$: destruction en chaleur due à l'action de la viscosité moléculaire

avec $\tau_{ij}'=\mu\left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j'}{\partial x_i}\right)$; $d_{ij}=d_{ij}^T+d_{ij}^?$

Dans cette équation, seuls les termes de convection C_{ij} et de production P_{ij} sont fermés (ou exacts), les autres d_{ij}^T, $d_{ij}^?$, Φ_{ij} et ε_{ij} doivent être modélisés à l'aide de grandeurs connues.

1.2 Deuxième écriture (utilisée entre autres en DNS par Mansour et al. 1993)

En regroupant les termes visqueux de l'Eq(1)

$$V_{ij}=\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\overline{u_j'\tau_{ik}'}+\overline{u_i'\tau_{jk}'}\right)-\left(\overline{\tau_{jk}'\frac{\partial u_i'}{\partial x_k}}+\overline{\tau_{ik}'\frac{\partial u_j'}{\partial x_k}}\right)$$

$$=d_{ij}^?+\rho\varepsilon_{ij}$$

On peut écrire :

$$V_{ij}=\overline{u_j'\frac{\partial\tau_{ik}'}{\partial x_k}}+\overline{\tau_{ik}'\frac{\partial u_j'}{\partial x_k}}+\overline{u_i'\frac{\partial\tau_{jk}'}{\partial x_k}}+\overline{\tau_{jk}'\frac{\partial u_i'}{\partial x_k}}-\overline{\tau_{jk}'\frac{\partial u_i'}{\partial x_k}}-\overline{\tau_{ik}'\frac{\partial u_j'}{\partial x_k}}$$

$$=\overline{u_j'\frac{\partial\tau_{ik}'}{\partial x_k}}+\overline{u_i'\frac{\partial\tau_{jk}'}{\partial x_k}} \qquad \text{or} \quad \tau_{ik}'=\mu\left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_k}+\frac{\partial u_k'}{\partial x_i}\right)$$

$$\Rightarrow V_{ij}=\overline{u_j'\mu\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_k}+\frac{\partial u_k'}{\partial x_i}\right)}+\overline{u_i'\mu\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial u_j'}{\partial x_k}+\frac{\partial u_k'}{\partial x_j}\right)}$$

$$=\mu\left[\overline{u_j'\left(\frac{\partial^2 u_i'}{\partial x_k\partial x_k}+\underbrace{\frac{\partial^2 u_k'}{\partial x_k\partial x_i}}_{\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u_k'}{\partial x_k}\right)^0}\right)}+\overline{u_i'\left(\frac{\partial^2 u_j'}{\partial x_k\partial x_k}+\frac{\partial^2 u_k'}{\partial x_k\partial x_j}^0\right)}\right.$$

$$\nu_{ij} = \mu \left[\overline{u_j' \frac{\partial^2 u_i'}{\partial x_k \partial x_k}} + \overline{u_i' \frac{\partial^2 u_j'}{\partial x_k \partial x_k}} \right]$$

$$= \mu \left[\frac{\partial}{\partial x_k} \left[\overline{u_j' \frac{\partial u_i'}{\partial x_k}} \right] - \overline{\frac{\partial u_j'}{\partial x_k} \frac{\partial u_i'}{\partial x_k}} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\overline{u_i' \frac{\partial u_j'}{\partial x_k}} \right] - \overline{\frac{\partial u_i'}{\partial x_k} \frac{\partial u_j'}{\partial x_k}} \right]$$

$$= \mu \left[\frac{\partial^2 \overline{u_i' u_j'}}{\partial x_k \partial x_k} - 2 \overline{\frac{\partial u_i'}{\partial x_k} \frac{\partial u_j'}{\partial x_k}} \right]$$

$$= \underbrace{\mu \frac{\partial^2 \overline{u_i' u_j'}}{\partial x_k \partial x_k}}_{\frac{\partial}{\partial x_k}\left[\mu \frac{\partial \overline{u_i' u_j'}}{\partial x_k}\right]} - \underbrace{2\mu \overline{\frac{\partial u_i'}{\partial x_k} \frac{\partial u_j'}{\partial x_k}}}_{\rho \varepsilon_{ij}}$$

$\underbrace{\qquad\qquad}_{d_{ij}^{\nu}}$

d'où le terme d_{ij}^{ν} devient un terme exact (non ouvert), et on a :

$$\underbrace{\frac{\partial (\rho \overline{u_i' u_j'})}{\partial t} + \frac{\partial (\rho \overline{u_i' u_j'} \bar{u}_k)}{\partial x_k}}_{c_{ij}} = \underbrace{-\frac{\partial}{\partial x_k} \left[\rho \overline{u_i' u_j' u_k'} + \overline{p' u_j'} \delta_{ik} + \overline{p' u_i'} \delta_{jk} \right]}_{d_{ij}^{T}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_k} \left[\mu \frac{\partial \overline{u_i' u_j'}}{\partial x_k} \right]}_{d_{ij}^{\nu}}$$

$$+ \underbrace{\overline{p' \left(\frac{\partial u_j'}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i'}{\partial x_j} \right)}}_{\Phi_{ij}} + \underbrace{\left(-\rho \overline{u_i' u_k'} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_k} - \rho \overline{u_j' u_k'} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} \right)}_{P_{ij}} - \underbrace{2\mu \overline{\frac{\partial u_i'}{\partial x_k} \frac{\partial u_j'}{\partial x_k}}}_{\rho \varepsilon_{ij}} \qquad (2)$$

2/ Equation de transport exacte pour l'énergie cinétique turbulente k

Prenons la demi-somme de l'équations aux tensions de Reynolds.

2.1 1ère écriture

$$\underbrace{\frac{\partial (\rho \frac{\overline{u_i' u_i'}}{2})}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\rho \frac{\overline{u_i' u_i'}}{2} \bar{u}_k \right)}_{\text{convection } c_k} = \underbrace{-\frac{\partial}{\partial x_k} \left[\rho \frac{\overline{u_i' u_i' u_k'}}{2} + \overline{p' u_i'} \delta_{ik} \right]}_{\text{diffusion turbulente } d_k^T} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\overline{u_i' \tau_{ik}'} \right)}_{\text{diffusion visqueuse moléculaire } d_k^{\nu}}$$

$$\underbrace{+ \overline{p' \frac{\partial u_i'}{\partial x_i}}}_{\frac{1}{2}\Phi_{ii} = 0} \underbrace{- \rho \overline{u_i' u_k'} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k}}_{\text{Production } P_k} \underbrace{- \overline{\tau_{ik}' \frac{\partial u_i'}{\partial x_k}}}_{\frac{1}{2}\rho \varepsilon_{ii} = \rho \varepsilon}$$

ε = taux de dissipation de l'énergie cinétique turbulente k.

$$\Leftrightarrow \underbrace{\frac{\partial \rho k}{\partial t} + \frac{\partial \rho \bar{u}_e k}{\partial x_e}}_{C_k} = \underbrace{-\frac{\partial}{\partial x_e}\left[\rho \frac{\overline{u_i' u_i' u_e'}}{2} + \overline{p' u_e'}\right] + \frac{\partial}{\partial x_e}\left(\overline{u_i' \tau_{ie}}\right) - \rho \overline{u_i' u_e'} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_e}}_{d_k} \underbrace{- \overline{\tau_{ie}' \frac{\partial u_i'}{\partial x_e}}}_{P_k} \underbrace{}_{\rho\varepsilon}$$

2.2 2ème écriture

Nous pouvons écrire :

$$\frac{\partial \rho k}{\partial t} + \frac{\partial \rho \bar{u}_e k}{\partial x_e} = -\frac{\partial}{\partial x_e}\left[\rho \frac{\overline{u_i' u_i' u_e'}}{2} + \overline{p' u_e'}\right] + \frac{\partial}{\partial x_e}\left[\mu \frac{\partial k}{\partial x_e}\right]$$

$$+ \overline{2\, p' \frac{\partial u_i'}{\partial x_i}} - \rho \overline{u_i' u_e'} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_e} - \frac{2}{2}\mu \overline{\frac{\partial u_i'}{\partial x_e}\frac{\partial u_i'}{\partial x_e}}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\frac{\partial \rho k}{\partial t} + \frac{\partial \rho \bar{u}_e k}{\partial x_e}}_{C_k} = \underbrace{-\frac{\partial}{\partial x_e}\left[\rho \frac{\overline{u_i' u_i' u_e'}}{2} + \overline{p' u_e'}\right]}_{d_k} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_e}\left(\mu \frac{\partial k}{\partial x_e}\right)}_{d_k'}$$

$$\underbrace{-\rho \overline{u_i' u_e'} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_e}}_{P_k} \underbrace{- \mu \overline{\frac{\partial u_i'}{\partial x_e}\frac{\partial u_i'}{\partial x_e}}}_{\rho\varepsilon \Rightarrow \varepsilon = 2\overline{\frac{\partial u_i'}{\partial x_e}\frac{\partial u_i'}{\partial x_e}}}$$

3/ Modélisation de l'équation de transport pour l'énergie cinétique turbulente k

3.1 1ère écriture

a) Le terme de convection C_k est exact

b) Le terme de dissipation $\rho\varepsilon$ sera calculé via son équation de transport

c) Le terme de production P_k sera modélisé en utilisant l'hypothèse de Boussinesq.

$$-\rho \overline{u_i' u_e'} = \mu_T \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_e} + \frac{\partial \bar{u}_e}{\partial x_i}\right) - \frac{2}{3}\rho k \delta_{ie}$$

donc $P_k = -\rho \overline{u_i' u_e'} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_e} = \mu_T \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_e} + \frac{\partial \bar{u}_e}{\partial x_i}\right)\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_e} - \frac{2}{3}\rho k \underbrace{\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_e}}_{\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0 \text{ conservation masse moyenne.}} \delta_{ie}$

$\Rightarrow$ il faut modéliser la viscosité tourbillonnaire μ_T.

Remarque : $Re = \frac{VL}{\nu} \Rightarrow [\nu] = [V][L]$

par analogie, on va considérer que $[\nu_T] = [V_T][L_T]$

or $[V_t] = \sqrt{k}$ et $[L_t] = \ell_T = \frac{k^{3/2}}{\varepsilon}$

$$\Rightarrow \mu_T = \rho \nu_T$$
$$= c_\mu \rho k^{1/2} \frac{k^{3/2}}{\varepsilon}$$
$$= c_\mu \rho \frac{k^2}{\varepsilon}$$

$$\boxed{\mu_T = c_\mu \mu Re_T}$$

le coefficient c_μ est une constante de proportionalité, déterminée à partir de résultats expérimentaux. On a souvent

$$\boxed{c_\mu = 0.09}$$

Ainsi $$\boxed{P_k = c_\mu \mu Re_T \frac{\partial \bar{u_i}}{\partial x_e} \left(\frac{\partial \bar{u_i}}{\partial x_e} + \frac{\partial \bar{u_e}}{\partial x_i} \right)}$$

a) **le terme de diffusion moléculaire.**

→ dans le cas de la seconde écriture, ce terme est exact

et $d_k^? = \frac{\partial}{\partial x_e} \left(\mu \frac{\partial k}{\partial x_e} \right)$

→ dans le cas de la 1ère écriture, on a

$$d_k^? = \frac{\partial}{\partial x_e} \left(\overline{u_i' \tau_{ie}'} \right) \qquad \text{or } \tau_{ie}' = \mu \left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_e} + \frac{\partial u_e'}{\partial x_i} \right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_e} \left[\mu \overline{u_i' \left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_e} + \frac{\partial u_e'}{\partial x_i} \right)} \right]$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_e} \left[\mu \left(\overline{u_i' \frac{\partial u_i'}{\partial x_e}} + \overline{u_i' \frac{\partial u_e'}{\partial x_i}} \right) \right]$$

$\overline{u_i' \frac{\partial u_i'}{\partial x_e}} = \frac{1}{2} \frac{\partial \overline{u_i' u_i'}}{\partial x_e}$; $\overline{u_i' \frac{\partial u_e'}{\partial x_i}} = \frac{\partial \overline{u_i' u_e'}}{\partial x_i} - \overline{u_e' \frac{\partial u_i'}{\partial x_i}}$ (0 : continuité fluctuante)

$$= \frac{\partial}{\partial x_e} \left[\mu \frac{\partial k}{\partial x_e} + \underbrace{\mu \frac{\partial \overline{u_i' u_e'}}{\partial x_i}}_{\text{on néglige ce terme}} \right]$$

Par conséquent, quelquesoit l'écriture, on modélise la diffusion moléculaire par :

$$\boxed{d_k^l = \frac{\partial}{\partial x_e}\left[\mu \frac{\partial k}{\partial x_e}\right]}$$

c) le terme de diffusion turbulente d_k^T

$$d_k^T = \frac{\partial}{\partial x_e}\left[-\rho \frac{\overline{u'_i u'_i u'_e}}{2} - \overline{p' u'_e}\right]$$

ne sachant pas calculer ou mesurer le terme de corrélation pression-vitesse, ce terme est souvent négligé.
On en reparlera + tard.

Par analogie, avec la modélisation de la diffusion moléculaire, la diffusion turbulente est modélisée par une relation de type premier gradient

$$d_k^T = \frac{\partial}{\partial x_e}\left[\frac{\mu_T}{\sigma_k}\frac{\partial k}{\partial x_e}\right]$$

$\sigma_k \simeq 1$ est une constante d'optimisation numérique, empirique.

3.2 <u>2ème Equation</u> -

Seul les termes de dissipation $\rho\varepsilon$ et de diffusion moléculaire sont différents, or le terme de dissipation étant modélisé via son équation de transport, et le terme de diffusion moléculaire étant exacte et correspondant à la modélisation de la 1ère équation, nous n'avons aucune différence dans la modélisation de l'équation de transport de l'énergie cinétique turbulente k.
Seules les hypothèses simplificatrices sous-jacentes changent.

3.3. <u>Modélisation proposée à Haut Reynolds en écoulement incompressible.</u>

Finalement, nous avons -

$$\underbrace{\frac{\partial \rho k}{\partial t} + \frac{\partial (\rho k \bar{u}_e)}{\partial x_e}}_{\text{Convection } C_k} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_e}\left[\left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_k}\right)\frac{\partial k}{\partial x_e}\right]}_{\text{diffusion } d_k} + \underbrace{\mu_T \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_e}\left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_e} + \frac{\partial \bar{u}_e}{\partial x_i}\right)}_{P_k} - \rho\varepsilon$$

avec $\mu_T = C_\mu \rho R_{eT}$; $C_\mu = 0.09$; $R_{eT} = \frac{k^2}{\nu\varepsilon}$

4/ Equation de transport exacte pour le taux de dissipation de l'énergie cinétique turbulente

→ Dans le cas de la 1ère équation on a : $\rho\varepsilon = \overline{\tau_{ij}\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}}$

$$\Rightarrow \quad \rho\varepsilon = \mu\overline{\left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j'}{\partial x_i}\right)\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}}$$

$$= \rho\left[\nu\overline{\left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j'}{\partial x_i}\right)\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}}\right]$$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon = \nu\left(\overline{\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}}+\overline{\frac{\partial u_j'}{\partial x_i}\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}}\right)$$

$$= \underbrace{\nu\left(\overline{\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}}\right)}_{\text{posons } \hat{\varepsilon}\text{, le taux de dissipation de la seconde équation.}} + \nu\left(\overline{\frac{\partial u_j'}{\partial x_i}\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \hat{\varepsilon} = \varepsilon - \nu\left(\overline{\frac{\partial u_j'}{\partial x_i}\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}}\right)$$

Remarque : $\varepsilon = \nu\overline{\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j'}{\partial x_i}\right)}$

$$= 2\nu\overline{\underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j'}{\partial x_i}\right)}_{D_{ij}}\underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j'}{\partial x_i}\right)}_{D_{ij}}}$$

$$\varepsilon = 2\nu\overline{D_{ij}D_{ij}}$$

dém : $\varepsilon = 2\nu\frac{1}{2}\frac{1}{2}\overline{\left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j'}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j'}{\partial x_i}\right)}$

$$= \nu\frac{1}{2}\left[\overline{\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}}+\underbrace{\overline{\frac{\partial u_j'}{\partial x_i}\frac{\partial u_j'}{\partial x_i}}}_{\overline{\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}}\text{ car indice muet}}+2\overline{\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}\frac{\partial u_j'}{\partial x_i}}\right]$$

$$= \nu\frac{1}{2}\left[2\overline{\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}}+2\overline{\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}\frac{\partial u_j'}{\partial x_i}}\right]$$

$$= \nu\overline{\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j'}{\partial x_i}\right)} \quad \text{c.q.f.d.}$$

Donc $\hat{\varepsilon} = \nu\left(\overline{\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}}\right)$

$$= \underbrace{2\nu\overline{D_{ij}D_{ij}}}_{\varepsilon} - \nu\left(\overline{\frac{\partial u_j'}{\partial x_i}\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}}\right)$$

or $\overline{\frac{\partial u_j'}{\partial x_i}\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\overline{u_j'\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}}\right) - \overline{u_j'\underbrace{\frac{\partial^2 u_i'}{\partial x_i\partial x_j}}_{\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_i}\right)}}$ ← conservation masse fluctuante

donc $$\overline{\frac{\partial u_e'}{\partial x_i}\frac{\partial u_i'}{\partial x_e}} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\overline{u_e'\frac{\partial u_i'}{\partial x_e}}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\frac{\partial}{\partial x_e}\left(\overline{u_e' u_i'}\right) - \overline{u_i'\frac{\partial u_e'}{\partial x_e}}\right]$$

$\overline{u_i'\frac{\partial u_e'}{\partial x_e}} = 0$ conservation masse fluctuante.

Finalement :

$$\underbrace{\nu\left(\overline{\frac{\partial u_i'}{\partial x_e}\frac{\partial u_i'}{\partial x_e}}\right)}_{\hat{\varepsilon}} = \underbrace{2\nu\overline{D_{ie}D_{ie}}}_{\varepsilon} - \underbrace{\nu\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\overline{\frac{\partial u_i' u_e'}{\partial x_e}}\right)}_{\text{ce terme est nul en écoulement homogène, car en écoulement homogène la dérivée (càd les gradient) de toutes corrélations turbulente moyenne est nulle}}$$

$\Rightarrow \hat{\varepsilon} = \varepsilon$ en écoulement homogène.

En réalité la différence entre ε (qui est la "vrai" dissipation) et $\hat{\varepsilon}$ (où on fait l'hypothèse d'homogénéité) est faible mm qd on ne fait pas l'hyp. d'homogénéité, sauf dans les régions de fort gradients comme les ondes de choc ou les régions proche paroi. Ou dans les régions proche paroi Bradshaw et Perot (1993) ont montré que la différence est au maximum de 2% et par conséquent peut être ignoré.

En tous les cas, tout le monde considère une équation de transport pour $\hat{\varepsilon}$ plutôt que pour ε.

On posera donc dans la suite du cours.

$\varepsilon \simeq \hat{\varepsilon}$, tout en gardant à l'esprit qu'il y a l'hyp d'homogénéité sous-jacente.

Ainsi on cherchera une équation de transport pour $\nu\overline{\frac{\partial u_i'}{\partial x_e}\frac{\partial u_i'}{\partial x_e}}$.

Cette équation est obtenue en dérivant l'équation de transport pour la fluctuation de la vitesse $u_i' \to \frac{\partial}{\partial x_k}\left[\frac{Du_i'}{Dt}\right]$, puis on multiplie cette nouvelle équation par $2\nu\frac{\partial u_i'}{\partial x_k}$ et on moyenne le tout.

→ démonstration en annexe

Ainsi, l'équation exacte pour le taux de dissipation de l'énergie cinétique turbulent est :

$$\underbrace{\frac{\partial \rho \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial \rho \varepsilon \bar{u}_e}{\partial x_e}}_{\text{Convection } c_\varepsilon} = \underbrace{-\frac{\partial}{\partial x_e}\left[\mu \overline{u_e' \frac{\partial u_i'}{\partial x_k}\frac{\partial u_i'}{\partial x_k}} + 2\nu \overline{\frac{\partial u_e'}{\partial x_i}\frac{\partial p'}{\partial x_i}} - \mu \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_e}\right]}_{\text{diffusion } d_\varepsilon = d_\varepsilon^T + d_\varepsilon^\nu}$$

(diffusion turbulente due aux fluctuations de vitesse et de pression ; diffusion moléculaire ; $d_\varepsilon^T = d_\varepsilon^\mu + d_\varepsilon^p$)

$$\underbrace{-2\mu \overline{\frac{\partial u_i'}{\partial x_k}\frac{\partial u_i'}{\partial x_e}\frac{\partial u_e'}{\partial x_k}}}_{\text{Production par interaction tourbillonnaire : } P_\varepsilon^4} \quad \underbrace{-2\mu \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_e}\left[\overline{\frac{\partial u_i'}{\partial x_k}\frac{\partial u_e'}{\partial x_k}} + \overline{\frac{\partial u_k'}{\partial x_i}\frac{\partial u_k'}{\partial x_e}}\right]}_{P_\varepsilon^1 + P_\varepsilon^2} \quad \underbrace{-2\mu \overline{u_e' \frac{\partial u_i'}{\partial x_k}}\frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_e \partial x_k}}_{P_\varepsilon^3}$$

Production par action du mouvement moyen $= P_\varepsilon^1 + P_\varepsilon^2 + P_\varepsilon^3$

$$\underbrace{-2\rho\left(\nu \frac{\partial^2 u_i'}{\partial x_e \partial x_k}\right)\left(\nu \frac{\partial^2 u_i'}{\partial x_e \partial x_k}\right)}_{\text{destruction par action de la viscosité moléculaire. } D_\varepsilon}$$

$$P_\varepsilon^1 + P_\varepsilon^2 = \underbrace{-2\mu \overline{\frac{\partial u_i'}{\partial x_k}\frac{\partial u_l'}{\partial x_k}} Die}_{P_\varepsilon^1} \underbrace{-2\mu \overline{\frac{\partial u_k'}{\partial x_i}\frac{\partial u_l'}{\partial x_e}} Die}_{P_\varepsilon^2}$$

avec $Die = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_e} + \frac{\partial \bar{u}_e}{\partial x_i}\right]$

ainsi nous avons schématiquement :

$$c_\varepsilon = d_\varepsilon + P_\varepsilon - D_\varepsilon$$

avec $d_\varepsilon = \underbrace{d_\varepsilon^\mu + d_\varepsilon^p}_{d_\varepsilon^T} + d_\varepsilon^\nu$

$$P_\varepsilon = P_\varepsilon^1 + P_\varepsilon^2 + P_\varepsilon^3 + P_\varepsilon^4$$

5) Modélisation de l'équation pour le taux de dissipation ε

a) La convection n'a pas besoin d'être modélisée

b) la diffusion moléculaire $d_\varepsilon^\nu = \frac{\partial}{\partial x_e}\left(\mu \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_e}\right)$ est un terme exact

c) A haut nombre de Reynolds (turbulent), les termes de production $P_\varepsilon^1 + P_\varepsilon^2 + P_\varepsilon^3$ (par action du mouvement moyen) sont négligeables.

ainsi $P_\varepsilon = P_\varepsilon^4$ uniquement à haut Re_T

d) Le terme de production P_ε est modélisé en supposant que la production pour ε est $\propto$ à celle pour k

soit $P_\varepsilon \propto \frac{\varepsilon}{k} P_k$

$$\Rightarrow \quad P_\varepsilon = C_{\varepsilon_1} \frac{\varepsilon}{k} P_k$$

$$\text{avec } P_k = C_\mu \mu Re_T \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_e}\left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_e} + \frac{\partial \bar{u}_e}{\partial x_i}\right)$$

C_{ε_1} est une constante de proportionnalité ; $C_{\varepsilon_1} = 1.44$

e) le terme de destruction D_ε est également supposé proportionnel à la dissipation de k ; soit

$$D_\varepsilon = C_{\varepsilon_2} \frac{\varepsilon}{k} \rho \varepsilon$$
$$= C_{\varepsilon_2} \rho \frac{\varepsilon^2}{k} \quad ; \quad C_{\varepsilon_2} = 1.92$$

Remarque : Cette "modélisation" de P_ε et D_ε n'est en réalité valable qu'à l'équilibre, soit dans la zone logarithmique d'une couche limite turbulente.

g) La diffusion turbulente d_ε^T est modélisée en analogie avec la modélisation de la diffusion turbulente de k, soit :

$$d_\varepsilon^t = \frac{\partial}{\partial x_e}\left(\frac{\mu_T}{\sigma_\varepsilon}\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_e}\right) \quad ; \quad \sigma_\varepsilon = 1.3$$

Ainsi, nous avons l'équation de transport du taux de dissipation de l'énergie cinétique, en écoulement incompressible et à haut nombre de Reynolds :

$$\underbrace{\frac{\partial \rho \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial \rho \bar{u}_e \varepsilon}{\partial x_e}}_{C_\varepsilon} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_e}\left[\left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_\varepsilon}\right)\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_e}\right]}_{d_\varepsilon} + \underbrace{C_{\varepsilon_1}\frac{\varepsilon}{k} P_k}_{P_\varepsilon} - \underbrace{C_{\varepsilon_2}\rho\frac{\varepsilon^2}{k}}_{D_\varepsilon}$$

avec $P_k = C_\mu \mu Re_T \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_e}\left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_e} + \frac{\partial \bar{u}_e}{\partial x_i}\right)$

$C_\mu = 0.09$; $Re_T = \frac{\rho k^2}{\mu \varepsilon}$

$C_{\varepsilon_1} = 1.44$; $C_{\varepsilon_2} = 1.92$; $\sigma_\varepsilon = 1.3$

Remarque : La constante $C_{\varepsilon 2}$ a été calibrée sur la décroissance d'une turbulence de grille considérée homogène et isotrope

Les équations de transport pour k et ε sont alors très simples (convection = destruction)

$$\begin{cases} \bar{u}\,\dfrac{dk}{dx} = -\varepsilon \\ \bar{u}\,\dfrac{d\varepsilon}{dx} = -C_{\varepsilon 2}\dfrac{\varepsilon^2}{k} \end{cases}$$

Ce système possède une solution analytique de la forme

$$k = k_0\,(x - x_0)^{-n} \quad \text{avec} \quad n = \frac{1}{C_{\varepsilon 2} - 1}$$

$C_{\varepsilon 2} = 1.92$ est basée sur expérimentation de Comte-Bellot-Corrsin (1966)

Remarque : Nous montrerons, que dans la zone logarithmique d'une couche limite turbulente, les constantes sont reliées par la relation

$$(C_{\varepsilon 2} - C_{\varepsilon 1})\,\sigma_\varepsilon \sqrt{C_\mu} = \kappa^2$$

κ étant la constante de von Kármán qui vaut dans le cas où $C_{\varepsilon 2} = 1.92$; $C_{\varepsilon 1} = 1.44$; $\sigma_\varepsilon = 1.3$; $C_\mu = 0.09$

$\Rightarrow \kappa = 0.433$

c'est la constante déterminée à partir des résultats expérimentaux de Klebanoff (1955), par So et al. (1994)

Remarque :

- turbulence homogène : toutes les propriétés de la turbulence sont indépendantes du point de l'espace $\Rightarrow$ le tenseur de Reynolds est toujours le même

$\Rightarrow$ les gradients spaciaux de corrélations turbulentes moyennées sont nuls
les gradients spaciaux de l'écoulement moyen sont $\neq 0$

- turbulence isotrope : il n'y a pas de direction privilégiée dans l'espace 3D $\Rightarrow \overline{u'v'} = \overline{u'w'} = \overline{v'w'} = 0$,

$$\overline{u'u'} = \overline{v'v'} = \overline{w'w'} = \frac{2}{3}k$$

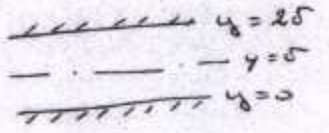
invariance par rotation et symétrie du tenseur de Reynolds

évidemment une turbulence isotrope est parfaitement homogène.

Chapitre IV

Couche limite turbulente dynamique en écoulement incompressible.

Ecoulement établi dans un canal plan.



- Ecoulement stationnaire : $\frac{\partial(\cdot)}{\partial t} = 0$
- Ecoulement plan : $\frac{\partial(\cdot)}{\partial z} = 0$; $\bar{w} = 0$, $\overline{u'w'} = \overline{v'w'} = 0$
- Ecoulement incompressible : $\rho = cte \Rightarrow \frac{\partial \bar{u}_\ell}{\partial x_\ell} = 0$ (conservation de la masse)
- Ecoulement établi : $\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x} = \frac{\partial \overline{u_i' u_3'}}{\partial x} = 0$

Ainsi les équations de Navier-Stokes,

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho \bar{u}_\ell}{\partial x_\ell} = 0 \\ \frac{\partial \rho \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho \bar{u}_i \bar{u}_\ell}{\partial x_\ell} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial (\bar{\tau}_{i\ell} - \rho \overline{u_i' u_\ell'})}{\partial x_\ell} \end{cases}$$

deviennent :

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}^{0} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial \rho \bar{u}\bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \rho \bar{u}\bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \rho \bar{u}\bar{w}}{\partial z} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{\partial (\bar{\tau}_{xx} - \rho \overline{u'u'})}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\bar{\tau}_{xy} - \rho \overline{u'v'}\right) + 0 \\ \frac{\partial \rho \bar{u}\bar{v}}{\partial x} + \frac{\partial \rho \bar{v}\bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \rho \bar{v}\bar{w}}{\partial z} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \frac{\partial (\bar{\tau}_{yx} - \rho \overline{v'u'})}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\bar{\tau}_{yy} - \rho \overline{v'v'}\right) + 0 \\ \frac{\partial \rho \bar{u}\bar{w}}{\partial x} + \frac{\partial \rho \bar{v}\bar{w}}{\partial y} + \frac{\partial \rho \bar{w}\bar{w}}{\partial z} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\bar{\tau}_{zx} - \rho \overline{w'u'}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\bar{\tau}_{zy} - \rho \overline{w'v'}\right) + \frac{\partial}{\partial z}(\ ) \end{cases}$$

$$\bar{\tau}_{ij} = \mu\left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i}\right) + \lambda \underbrace{\frac{\partial \bar{u}_\ell}{\partial x_\ell}}_{\text{incompressible}} \delta_{ij} \Rightarrow \text{écoulement établi } \frac{\partial \bar{\tau}_{ij}}{\partial x} = 0$$

$$\bar{\tau}_{xy} = \mu\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x}\right), \quad \bar{\tau}_{yy} = 2\mu \frac{\partial \bar{v}}{\partial y}, \quad \bar{\tau}_{zz} = 2\mu \frac{\partial \bar{w}}{\partial z}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = 0 \Rightarrow \bar{v} = cte \text{ or } \bar{v}(y=0) = 0 \Rightarrow \bar{v} = 0 \ \forall x,y,z \\ \frac{\partial \rho \bar{u}\bar{v}}{\partial y} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + 0 + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \rho \overline{u'v'}\right) \\ \frac{\partial \rho \bar{v}\bar{v}}{\partial y} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + 0 + \frac{\partial}{\partial y}\left(-\rho \overline{v'v'}\right) \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Soit finalement

$$\bar{v} = 0 \ \forall x,y,z \ ; \quad \vec{\bar{v}} = \bar{u}(y)\vec{e}_x$$

$$\begin{cases} ① \ \dfrac{\partial \bar{p}}{\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\mu \dfrac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \rho \overline{u'v'}\right) \\ ② \ \dfrac{\partial \bar{p}}{\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(-\rho \overline{v'v'}\right) \end{cases} \Rightarrow \quad \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} = F_1(y)$$

$$\Rightarrow \quad \bar{p} = G_1(y) + G_2(x)$$

$$\text{d'où} \quad \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} = 0 + \frac{\partial G_2(x)}{\partial x} = G(x)$$

$$\Rightarrow \quad ① \Rightarrow \quad \underbrace{\frac{\partial \bar{p}}{\partial x}}_{G(x)} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \rho \overline{u'v'}\right)}_{g(y)} = C^{te} = -a$$

en intégrant ① entre 0 et 2δ on obtient :

$$\left[\mu \frac{d\bar{u}}{dy} - \rho \overline{u'v'}\right]_0^{2\delta} = \left[-ay\right]_0^{2\delta}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\mu \frac{d\bar{u}}{dy}\Big|_{2\delta}}_{-\tau_w \text{ (par symétrie)}} - \underbrace{\mu \frac{d\bar{u}}{dy}\Big|_0}_{\tau_w} \underbrace{- \rho \overline{u'v'}\Big|_{2\delta}}_{0 \text{ adhérence}} + \underbrace{\rho \overline{u'v'}\Big|_0}_{0 \text{ adhérence}} = -a\,2\delta + 0$$

$$\Rightarrow \quad -2\tau_w = -2a\delta$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{a = \frac{\tau_w}{\delta}} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} = -\frac{\tau_w}{\delta}$$

Remarque : par symétrie $-\rho \overline{u'v'}\big|_{y=\delta} = 0$ et $\mu \dfrac{d\bar{u}}{dy}\Big|_{y=\delta} = 0$

Afin de déterminer les 3 zones qui caractérisent la couche limite turbulente, nous allons nous placer tel que $y \ll \delta$; δ représentant la demi-hauteur du canal.

intégrons ① entre 0 et y :

$$\mu \frac{d\bar{u}}{dy} - \underbrace{\mu \frac{d\bar{u}}{dy}\Big|_0}_{\tau_w} - \rho \overline{u'v'} + \underbrace{\rho \overline{u'v'}\Big|_0}_{0} = -ay$$

$$\Rightarrow \quad \mu \frac{d\bar{u}}{dy} - \rho \overline{u'v'} = \underbrace{-\frac{\tau_w}{\delta} y}_{-a} + \tau_w$$

$$= \tau_w\left(1 - \frac{y}{\delta}\right) \qquad \text{or} \quad y \ll \delta \Rightarrow \delta \gg y \Rightarrow \frac{y}{\delta} \ll 1$$

$$\Rightarrow \quad \mu \frac{d\bar{u}}{dy} - \rho \overline{u'v'} = \tau_w \qquad \text{or} \quad u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\rho \frac{d\bar{u}}{dy} - \overline{u'v'} = u_\tau^2} \quad (3)$$

→ Zone la plus proche de la paroi : <u>sous-couche visqueuse</u>

alors dans cette zone on a :

$$-\overline{u'v'} \ll \rho \frac{d\bar{u}}{dy}$$

d'où (3) devient $\rho \frac{d\bar{u}}{dy} = u_\tau^2$

intégrons : $\rho \bar{u} = u_\tau^2 y + C$

or $\bar{u}(y=0) = 0 \Rightarrow C = 0$

donc on a $\frac{\bar{u}}{u_\tau^2} = \frac{y}{\nu} \frac{u_\tau}{\nu}$ (Rq : $\rho = cte$ car μ et ρ sont cte)

$$\Leftrightarrow \boxed{u^+ = y^+} \quad (4)$$

Dans la sous-couche visqueuse, nous avons une évolution linéaire du profil de vitesse.

→ <u>Zone logarithmique</u> : dans cette zone $\rho \frac{d\bar{u}}{dy} \ll -\overline{u'v'}$:

d'où (3) devient $-\overline{u'v'} = u_\tau^2$ (5)

[dans cette zone une analyse dimensionnelle montre que le profil de vitesse est (et un développement asymptotique avec raccordement de la sous couche visqueuse à $\bar{u}(y \to +\infty) = u_e$)

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + B \quad (6)$$

des mesures ont montré que $\frac{d\bar{u}}{dy} \kappa y = u_\tau$ avec $\kappa \simeq 0{,}41$ cte de von Kármán

or $\frac{d\bar{u}}{dy} = \frac{d\bar{u}}{du^+} \frac{du^+}{dy^+} \frac{dy^+}{dy} \Rightarrow \frac{du^+}{dy^+} = \frac{1}{\kappa y} u_\tau \frac{du^+}{d\bar{u}} \frac{dy}{dy^+} = \frac{1}{\kappa y} u_\tau \frac{1}{u_\tau} \frac{\rho}{u_\tau} = \frac{1}{\kappa y^+}$

$\Rightarrow u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + B$ (6)

or $-\overline{u'v'}$ peut s'exprimer en utilisant l'hypothèse de Boussinesq

$$-\rho \overline{u_i' u_j'} = \mu_T \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \rho k \delta_{ij}$$

$$\Rightarrow -\overline{u'v'} = \nu_T \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}^{\,0}}{\partial x} \right) - 0$$

d'où (5) peut s'écrire : $\nu_T \frac{d\bar{u}}{dy} = u_\tau^2$

sachant que $u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + B$ avec $u^+ = \frac{\bar{u}}{u_\tau}$; $y^+ = y \frac{u_\tau}{\nu}$

et $\frac{d\bar{u}}{dy} = \frac{d\bar{u}}{du^+} \frac{du^+}{dy^+} \frac{dy^+}{dy}$

$\Rightarrow \frac{d\bar{u}}{dy} = u_\tau \frac{1}{\kappa y^+} \frac{u_\tau}{\nu}$

d'où $\nu_T \frac{u_\tau^2}{\kappa y^+} \frac{1}{\nu} = u_\tau^2$

$\Rightarrow \boxed{\nu_T = \nu \kappa y^+}$ dans la zone logarithmique en utilisant l'hypothèse de Boussinesq.

2/ Relation entre les constantes $C_{\varepsilon 1}$, $C_{\varepsilon 2}$, σ_ε et C_μ du modèle $k-\varepsilon$ dans la zone logarithmique.

Les équations du modèle $k-\varepsilon$ à haut nombre de Reynolds en écoulement incompressible sont :

$$\underbrace{\frac{\partial \rho k}{\partial t} + \frac{\partial \rho \bar{u}_e k}{\partial x_e}}_{\text{Convection } C_k} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_e}\left[\left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_k}\right)\frac{\partial k}{\partial x_e}\right]}_{\text{diffusion } d_k} + \underbrace{\mu_T \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_e} + \frac{\partial \bar{u}_e}{\partial x_i}\right)\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_e}}_{\text{Production } P_k} - \underbrace{\rho \varepsilon}_{\text{dissipation } \rho\varepsilon}$$

$$\mu_T = C_\mu \rho Re_T \; ; \; C_\mu = 0.09 \; ; \; Re_T = \frac{k^2}{\nu \varepsilon} \; ; \; \sigma_k = 1$$

$$\underbrace{\frac{\partial \rho \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial \rho \bar{u}_e \varepsilon}{\partial x_e}}_{\text{Convection } C_\varepsilon} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_e}\left[\left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_\varepsilon}\right)\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_e}\right]}_{\text{diffusion } d_\varepsilon} + \underbrace{C_{\varepsilon 1} P_k \frac{\varepsilon}{k}}_{\text{Production } P_\varepsilon} - \underbrace{C_{\varepsilon 2} \rho \frac{\varepsilon^2}{k}}_{\text{destruction } D_\varepsilon}$$

$$C_{\varepsilon 1} = 1.44 \; ; \; C_{\varepsilon 2} = 1.92 \; ; \; \sigma_\varepsilon = 1.3$$

Dans la zone logarithmique, le terme de convection et le terme de diffusion moléculaire sont négligeable, les équations $k-\varepsilon$ deviennent donc :

$$\begin{cases} 0 = \frac{\partial}{\partial x_e}\left(\frac{\mu_T}{\sigma_k}\frac{\partial k}{\partial x_e}\right) + P_k - \rho\varepsilon \\ 0 = \frac{\partial}{\partial x_e}\left(\frac{\mu_T}{\sigma_\varepsilon}\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_e}\right) + C_{\varepsilon 1} P_k \frac{\varepsilon}{k} - C_{\varepsilon 2} \rho \frac{\varepsilon^2}{k} \end{cases}$$

Dans la zone logarithmique, nous sommes également à l'équilibre, c'est à dire que nous considérons l'hypothèse d'équilibre locale :

$$\underbrace{P_k}_{\text{Production}} = \underbrace{\rho \varepsilon}_{\text{destruction}}$$

ce qui revient à négliger le terme de diffusion turbulente dans l'équation de transport de l'énergie cinétique turbulente k, ainsi nous avons les équations $k-\varepsilon$:

$$\begin{cases} (1) & P_k = \rho \varepsilon \\ (2) & 0 = \dfrac{\partial}{\partial x_\ell}\left(\dfrac{\mu_T}{\sigma_\varepsilon}\dfrac{\partial \varepsilon}{\partial x_\ell}\right) + \underbrace{C_{\varepsilon_1} P_k \dfrac{\varepsilon}{k} - C_{\varepsilon_2} \underbrace{\rho \varepsilon}_{P_k} \dfrac{\varepsilon}{k}}_{(C_{\varepsilon_1} - C_{\varepsilon_2}) P_k \frac{\varepsilon}{k}} \end{cases}$$

En tenant compte des hypothèses de l'écoulement en canal, l'Eq(2) devient :

$$\frac{d}{dy}\left(\frac{\mu_T}{\sigma_\varepsilon}\frac{d\varepsilon}{dy}\right) + (C_{\varepsilon_1} - C_{\varepsilon_2}) P_k \frac{\varepsilon}{k} = 0 \qquad (3)$$

(puisque pour toutes les grandeurs turbulentes $\frac{\partial}{\partial x} ; \frac{\partial}{\partial z} = 0$; car nous avons $\frac{\partial (\cdot)}{\partial z} = 0$ et $\frac{\partial \overline{u}}{\partial x} = \frac{\partial \overline{u'u'}}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = \frac{\partial k}{\partial x} = 0$ et $\frac{\partial \mu_T}{\partial x^2} = 0$)

avec $$P_k = \mu_T \left(\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_\ell} + \frac{\partial \overline{u_\ell}}{\partial x_i}\right)\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_\ell}$$

$$= \mu_T \left(\frac{\partial \overline{u}}{\partial y}\right)\frac{\partial \overline{u}}{\partial y} = \mu_T \left(\frac{d\overline{u}}{dy}\right)^2$$

(3) devient : $$\frac{d}{dy}\left(\frac{\mu_T}{\sigma_\varepsilon}\frac{d\varepsilon}{dy}\right) + (C_{\varepsilon_1} - C_{\varepsilon_2})\mu_T \left(\frac{d\overline{u}}{dy}\right)^2 \frac{\varepsilon}{k} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dy}\left(\frac{\gamma_T}{\sigma_\varepsilon}\frac{d\varepsilon}{dy}\right) + (C_{\varepsilon_1} - C_{\varepsilon_2})\gamma_T \left(\frac{d\overline{u}}{dy}\right)^2 \frac{\varepsilon}{k} = 0$$

or dans la zone logarithmique, nous avons montré que nous avions $-\overline{u'v'} = u_\tau^2$ avec $-\overline{u'v'} = \gamma_T \frac{d\overline{u}}{dy}$ (Boussinesq)

$$\Rightarrow \gamma_T \frac{d\overline{u}}{dy} = u_\tau^2$$

d'où $$\frac{d}{dy}\left(\frac{\gamma_T}{\sigma_\varepsilon}\frac{d\varepsilon}{dy}\right) + (C_{\varepsilon_1} - C_{\varepsilon_2}) u_\tau^2 \frac{d\overline{u}}{dy}\frac{\varepsilon}{k} = 0 \quad (4)$$

Sachant que $\mu_T = C_\mu \mu Re_T$

$= C_\mu \rho \frac{k^2}{\varepsilon}$

alors $C_\mu = \frac{\mu_T}{\rho k^2} \varepsilon$

or à l'équilibre $P_k = \rho \varepsilon \iff \varepsilon = \frac{P_k}{\rho} = \frac{1}{\rho} \mu_T \left(\frac{d\bar{u}}{dy}\right)^2$

$\Rightarrow C_\mu = \vartheta_T \frac{1}{k^2} \vartheta_T \left(\frac{d\bar{u}}{dy}\right)^2 = \underbrace{\left(\vartheta_T \frac{d\bar{u}}{dy}\right)^2}_{u_\tau^4 \text{ dans la zone logarithmique}} \frac{1}{k^2}$

$\Rightarrow C_\mu = \frac{u_\tau^4}{k^2} \Rightarrow \sqrt{C_\mu} = \frac{u_\tau^2}{k}$

remplaçons dans Eq (5), alors on a :

$$\frac{d}{dy}\left(\frac{\vartheta_T}{\sigma_\varepsilon} \frac{d\varepsilon}{dy}\right) + (C_{\varepsilon_1} - C_{\varepsilon_2}) \varepsilon \sqrt{C_\mu} \frac{d\bar{u}}{dy} = 0 \qquad (5)$$

or $\varepsilon = \vartheta_T \left(\frac{d\bar{u}}{dy}\right)^2 = \left(\vartheta_T \frac{d\bar{u}}{dy}\right) \frac{d\bar{u}}{dy} = u_\tau^2 \frac{d\bar{u}}{dy}$

et $\frac{d\bar{u}}{dy} = \frac{d\bar{u}}{du^+} \frac{du^+}{dy^+} \frac{dy^+}{dy}$ avec $u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + B$

$u^+ = \frac{\bar{u}}{u_\tau}$ et $y^+ = y \frac{u_\tau}{\nu}$

$\frac{d\bar{u}}{dy} = u_\tau \frac{1}{\kappa y^+} \frac{u_\tau}{\nu}$

$= \frac{u_\tau^2}{\kappa} \frac{\nu}{y u_\tau} = \frac{u_\tau}{\kappa y}$ $\Rightarrow \varepsilon = u_\tau^2 \frac{u_\tau}{\kappa y}$

d'où (5) devient :

$$\frac{d}{dy}\left(\frac{\vartheta_T}{\sigma_\varepsilon} \underbrace{\frac{d}{dy}\left(\frac{u_\tau^3}{\kappa y}\right)}_{\frac{u_\tau^3}{\kappa}\left(-\frac{1}{y^2}\right)}\right) + (C_{\varepsilon_1} - C_{\varepsilon_2}) \frac{u_\tau^3}{\kappa y} \sqrt{C_\mu} \frac{u_\tau}{\kappa y} = 0$$

or $\vartheta_T = \frac{u_\tau^2}{\frac{d\bar{u}}{dy}} = \frac{u_\tau^2}{u_\tau / (\kappa y)} = u_\tau \kappa y$

$\Rightarrow \frac{d}{dy}\left[\frac{u_\tau \kappa y}{\sigma_\varepsilon} \frac{u_\tau^3}{\kappa}\left(-\frac{1}{y^2}\right)\right] + (C_{\varepsilon_1} - C_{\varepsilon_2}) \frac{u_\tau^4}{\kappa^2 y^2} \sqrt{C_\mu} = 0$

(TV)

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dy}\left[\frac{-u_\varepsilon^4}{\sigma_\varepsilon y}\right] + (c_{\varepsilon 1} - c_{\varepsilon 2})\frac{u_\varepsilon^4}{\kappa^2 y^2}\sqrt{c_\mu} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sigma_\varepsilon} + (c_{\varepsilon 1} - c_{\varepsilon 2})\frac{\sqrt{c_\mu}}{\kappa^2} = 0$$

$$\Rightarrow (c_{\varepsilon 1} - c_{\varepsilon 2})\frac{\sqrt{c_\mu}}{\kappa^2} = -\frac{1}{\sigma_\varepsilon}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{(c_{\varepsilon 2} - c_{\varepsilon 1})\sigma_\varepsilon \sqrt{c_\mu} = \kappa^2}$$

Ainsi, avec l'expérience sur plaque plane de Klebanoff (1955), et les constantes $c_{\varepsilon 1}$, $c_{\varepsilon 2}$, σ_ε et c_μ du modèle k-ε de Launder-Sharma (1974), on trouve

$\boxed{\kappa = 0.4326}$ ce qui correspond à l'expérience de Klebanoff (1955)
d'après article de Sreenivasan et al. (1994)
qui a également déterminé la constante

$\boxed{B = 5.34}$

3) Récapitulatif des différentes zones de la couche limite turbulente dynamique - Structure turbulente.

3.1 Récapitulatif

On distingue donc 3 zones :

→ la sous-couche visqueuse ou zone linéaire
où $u^+ = y^+$
cette zone est la plus proche de la paroi et les tensions visqueuses sont prépondérantes devant les tensions turbulentes
on la trouve pour $y^+ < 3$ à 5

→ la zone tampon
située entre la sous-couche visqueuse et la zone logarithmique
on la situe 3 à $5 < y^+ < 40$ à 60

→ la zone logarithmique où on a $u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + B$
κ étant la constante de von Kármán
et on a $\kappa \simeq 0.41$; $B \simeq 5$
Cependant, ces "constantes" varient légèrement en fonction

notamment du nombre de Reynolds. Principalement ce qu'on appelle la zone de sillage

et Tennekes, à partir de nombreux résultats expérimentaux a proposé

$$\frac{1}{\kappa} = 3 - \frac{5}{Re^{1/3}}$$

Re = nombre de Reynolds.

3.2 Structure de la turbulence sur plaque plane -

(cf. Article (2004) Geoffroy, Samuel, Vallet AIAA J. 42 pp. 1101-1106)

Sur le canal de Laufer on constate que

$$\overline{v'v'} < \overline{w'w'} < \overline{u'u'}$$

donc $\overline{w'w'} \neq 0$ est bien confirmé bien que l'écoulement soit 2-D

Les tensions de Reynolds sont nulles à la paroi et sont maximum dans la zone tampon (vers $y^+ \sim 10$) pour décroître jusqu'à une valeur très faible à la suite de la couche-limite.

La structure turbulente, c'est le rapport

$$\frac{\overline{u'u'}}{k} \; ; \; \frac{\overline{v'v'}}{k} \; ; \; \frac{\overline{w'w'}}{k} \text{ et } \frac{\overline{u'v'}}{k}$$

dans le cas du canal de Laufer, on a:

$$\frac{\overline{u'u'}}{\overline{v'v'}} \simeq 5.6 \quad ; \quad \frac{\overline{u'u'}}{\overline{w'w'}} \simeq 3$$

Taux de turbulence : $Tu = \sqrt{\frac{2}{3}k} \; |\tilde{v}|^{-1}$

ou intensité turbulente

et $Tu_e = \sqrt{\frac{2}{3}k}\, u_e^{-1}$: taux de turbulence extérieur dans un écoulement où $\tilde{v} = \tilde{u}$

→ importance du Tu extérieur

(AIAA J. vol 42 pp. 1101-1106)
AIAA J. vol 42 pp. 1089-1100)

Chapitre V

Modélisation Statistique de la turbulence : Ecoulement compressible à haut-nombre de Reynolds

Remarque : Dans un écoulement à haut-Reynolds : $Re_T \geq 10^5$, les grosses structures ne sont pas affectées par la viscosité et les petites structures peuvent être considérées localement isotropes.

Le système en écoulement compressible à résoudre est le suivant :

$$(S) : \begin{cases} \dfrac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \dfrac{\partial \bar{\rho} \tilde{u}_e}{\partial x_e} = 0 \\ \dfrac{\partial \bar{\rho} \tilde{u}_i}{\partial t} + \dfrac{\partial \bar{\rho} \tilde{u}_i \tilde{u}_e}{\partial x_e} = -\dfrac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \dfrac{\partial \left[\bar{\tau}_{ie} - \bar{\rho} \widetilde{u_i'' u_e''} \right]}{\partial x_e} \\ \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\bar{\rho} \breve{h}_t - \bar{p} \right) + \dfrac{\partial}{\partial x_e}\left(\bar{\rho} \tilde{u}_e \breve{h}_t \right) = -\left[\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\bar{\rho} \tilde{h} \right) + \dfrac{\partial \bar{\rho} \tilde{u}_e \tilde{h}}{\partial x_e} \right] \\ \qquad + \dfrac{\partial}{\partial x_e}\left[-\bar{\rho} \widetilde{h'' u_e''} - \bar{q}_e - \bar{\rho} \widetilde{\dfrac{u_i'' u_i'' u_e''}{2}} - \bar{\rho} \widetilde{u_i'' u_i'' u_e''} + \bar{\tau}_{ie} \tilde{u}_i + \overline{u_i'' \tau_{ie}} \right] \end{cases}$$

V.1 Modèle à 2 équation de transport $k - \varepsilon$ (Launder - Sharma ; 1974)

avec $k = \dfrac{\widetilde{u_i'' u_i''}}{2}$ et $\ell_T = \dfrac{k^{3/2}}{\varepsilon}$, nous avons bien les échelles caractéristiques de la turbulence en résolvant ces 2 équations de transport.

Equation de transport exacte aux tensions de Reynolds.

De la même façon qu'en écoulement incompressible, cette équation est obtenue en faisant :

$$Eq\left(\overline{\rho u_i'' u_j''} \right) = Eq\left(\bar{\rho} \widetilde{u_i'' u_j''} \right) = \underbrace{Eq\left(\overline{\rho u_i u_j} \right)}_{\tilde{u}_i Eq(\bar{\rho}\tilde{u}_j) + \tilde{u}_j Eq(\bar{\rho}\tilde{u}_i)} - Eq\left(\bar{\rho} \tilde{u}_i \tilde{u}_j \right)$$

$$\overline{u_i Eq(\rho u_j) + u_j Eq(\rho u_i)}$$

Nous avons donc l'équation aux tensions de Reynolds en écoulement compressible exacte :

$$\underbrace{\frac{\partial \bar{\rho}\widetilde{u_i''u_j''}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\bar{\rho}\widetilde{u_i''u_j''}\tilde{u}_k\right)}_{\text{Convection } C_{ij}} = \underbrace{-\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\bar{\rho}\widetilde{u_i''u_j''u_k''} + \overline{p'u_j'}\delta_{ik} + \overline{p'u_i'}\delta_{jk}\right)}_{\text{diffusion turbulente } d_{ij}^T = d_{ij}^{\sigma} + d_{ij}^{p}}$$

$$+ \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\overline{u_i'\tau_{jk}'} + \overline{u_j'\tau_{ik}'}\right)}_{\text{diffusion visqueuse } d_{ij}^{\nu}} + \underbrace{\overline{p'\left(2\bar{\rho}D_{ij}' - \frac{2}{3}\frac{\partial u_k'}{\partial x_k}\delta_{ij}\right)}}_{\text{redistribution } \Phi_{ij}} + \underbrace{\overline{p'\frac{2}{3}\frac{\partial u_k'}{\partial x_k}\delta_{ij}}}_{\text{corrélation pression-dilatation}}$$

$$\underbrace{-\left(\bar{\rho}\widetilde{u_i''u_k''}\frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_k} + \bar{\rho}\widetilde{u_j''u_k''}\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_k}\right)}_{\text{Production } P_{ij}} \quad \underbrace{-\left(\overline{\tau_{jk}'\frac{\partial u_i'}{\partial x_k}} + \overline{\tau_{ik}'\frac{\partial u_j'}{\partial x_k}}\right)}_{\text{destruction } \bar{\rho}\varepsilon_{ij} \text{ ou dissipation}}$$

$$\underbrace{-\left(\overline{u_i''}\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j} + \overline{u_j''}\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} - \overline{u_i''}\frac{\partial \bar{\tau}_{jk}}{\partial x_k} - \overline{u_j''}\frac{\partial \bar{\tau}_{ik}}{\partial x_k}\right)}_{\text{effet direct de compressibilité } \pi_{ij}} \qquad (1)$$

2/ Equation de transport exacte pour l'énergie cinétique turbulente

$k = \frac{\widetilde{u_i''u_i''}}{2}$ on prenant la demi-somme de l'Eq(1), on obtient :

$$\frac{\partial \bar{\rho}k}{\partial t} + \frac{\partial\left(\bar{\rho}k\tilde{u}_k\right)}{\partial x_k} = -\frac{\partial}{\partial x_k}\left[\bar{\rho}\frac{\widetilde{u_i''u_i''u_k''}}{2} + \underbrace{\overline{p'u_i'}}_{p'u_k'}\delta_{ik}\right] + \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\overline{u_i'\tau_{ik}'}\right)$$

$$+ \overline{p'\left(\underbrace{D_{ii}}_{\frac{1}{2}\frac{\partial u_i'}{\partial x_i}} - \frac{1}{2}\frac{2}{3}\frac{\partial u_k'}{\partial x_k}\underbrace{\delta_{ii}}_{3}\right)} + \overline{p'\frac{1}{2}\frac{2}{3}\frac{\partial u_k'}{\partial x_k}\delta_{ii}} \qquad -\bar{\rho}\widetilde{u_i''u_k''}\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_k}$$

$$= 0$$

$$- \overline{\tau_{ik}'\frac{\partial u_i'}{\partial x_k}} \quad \underbrace{-\left(\overline{u_i''}\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} - \overline{u_i''}\frac{\partial \bar{\tau}_{ik}}{\partial x_k}\right)}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\frac{\partial \bar{\rho} k}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho} k \tilde{u}_e}{\partial x_e}}_{\text{Convection } C_k} = \underbrace{-\frac{\partial}{\partial x_e}\left[\bar{\rho}\widetilde{\frac{u_i'' u_i'' u_e''}{2}} + \overline{p' u_e''} - \overline{u_i' \tau_{ie}}\right]}_{\text{diffusion turbulente et visqueuse}} + \underbrace{\overline{p' \frac{\partial u_e'}{\partial x_e}}}_{\text{corrélation pression-dilatation}}$$

$$\underbrace{-\bar{\rho}\widetilde{u_i'' u_e''}\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_e}}_{\text{Production } P_k} \underbrace{-\overline{\tau_{ie}' \frac{\partial u_i'}{\partial x_e}}}_{\text{dissipation } \bar{\rho}\varepsilon} \underbrace{-\left(\overline{u_e''}\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_e} - \overline{u_e''}\frac{\partial \bar{\tau}_{ie}}{\partial x_e}\right)}_{\text{effet direct de compressibilité.}} \quad (2)$$

Les termes corrélation pression-dilatation et effet direct de compressibilité étant des termes supplémentaires / écoulement incompressible -

Remarque : L'équation de conservation de l'énergie totale (chap 2 ; §3) exacte s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\bar{\rho}\breve{h}_t - \bar{p}\right) + \frac{\partial}{\partial x_e}\left(\bar{\rho}\tilde{u}_e \breve{h}_t\right) + \frac{\partial}{\partial t}\left(\bar{\rho} k\right) + \frac{\partial}{\partial x_e}\left(\bar{\rho}\tilde{u}_e k\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_e}\left[\overline{\tau_{ie}}\tilde{u}_i - \bar{\rho}\tilde{u}_i\widetilde{u_i'' u_e''} - \bar{q}_e - \bar{\rho}\widetilde{h'' u_e''}\right] - \frac{\partial}{\partial x_e}\left[\bar{\rho}\widetilde{\frac{u_i'' u_i'' u_e''}{2}} - \overline{u_i'' \tau_{ie}}\right] \quad (3)$$

En remarquant que dans l'Eq(2) on a :

- $$\overline{p' \frac{\partial u_e'}{\partial x_e}} - \overline{u_e''}\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_e} = \overline{p' \frac{\partial u_e''}{\partial x_e}} - \overline{u_e''}\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_e} = \overline{p' \frac{\partial u_e''}{\partial x_e}} - \left(\frac{\partial \bar{p}\,\overline{u_e''}}{\partial x_e} - \bar{p}\frac{\partial \overline{u_e''}}{\partial x_e}\right)$$

$$= \overline{p' \frac{\partial u_e''}{\partial x_e}} + \bar{p}\frac{\partial \overline{u_e''}}{\partial x_e} - \frac{\partial}{\partial x_e}\left(\bar{p}\,\overline{u_e''}\right)$$

$$= \overline{p \frac{\partial u_e''}{\partial x_e}} - \frac{\partial}{\partial x_e}\left(\bar{p}\,\overline{u_e''}\right)$$

- $$-\overline{\tau_{ie}' \frac{\partial u_i'}{\partial x_e}} + \overline{u_i''}\frac{\partial \bar{\tau}_{ie}}{\partial x_e} = -\overline{\tau_{ie}' \frac{\partial u_i''}{\partial x_e}} + \left(\frac{\partial \overline{u_i''}\,\bar{\tau}_{ie}}{\partial x_e} - \bar{\tau}_{ie}\frac{\partial \overline{u_i''}}{\partial x_e}\right)$$

$$= -\overline{\tau_{ie}\frac{\partial u_i''}{\partial x_e}} + \frac{\partial}{\partial x_e}\left(\overline{u_i''}\,\bar{\tau}_{ie}\right)$$

Remarque : L'équation de conservation de l'énergie totale exacte s'écrit

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\bar{\rho}\check{R}_t - \bar{p}\right) + \frac{\partial}{\partial x_e}\left(\bar{\rho}\,\widetilde{u_e}\,\widetilde{R}_t\right) + \bar{\rho}\frac{DR}{Dt} = \left\{\frac{\partial}{\partial x_e}\left[\widetilde{u_i}\left(\bar{\tau}_{ie} - \bar{\rho}\,\widetilde{u_i''u_e''}\right) - \left(\bar{q}_e + \bar{\rho}\,\widetilde{R''u_e''}\right)\right] - \frac{\partial}{\partial x_e}\left[\bar{\rho}\,\frac{\widetilde{u_i''u_i''u_e''}}{2} - \overline{u_i''\tau_{ie}}\right]\right\}$$

$$- \frac{\partial}{\partial x_e}\left[\bar{\rho}\,\frac{\widetilde{u_i''u_i''u_e''}}{2} + \overline{p'u_e'} - \overline{u_i'\tau_{ie}'}\right] + \overline{p'\frac{\partial u_e'}{\partial x_e}} + P_B - \overline{\tau_{ie}'\frac{\partial u_i'}{\partial x_e}} - \widetilde{u_e''}\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_e} + \widetilde{u_i''}\frac{\partial \bar{\tau}_{ie}}{\partial x_e}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\left[\bar{\rho}\check{R}_t - \bar{p}\right] + \frac{\partial}{\partial x_e}\left(\bar{\rho}\widetilde{u_e}\check{R}_t\right) - \frac{\partial}{\partial x_e}\left(\widetilde{u_i}\left(\bar{\tau}_{ie} - \bar{\rho}\,\widetilde{u_i''u_e''}\right) - \left(\bar{q}_e + \bar{\rho}\,\widetilde{R''u_e''}\right)\right]$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_e}\left[\overline{p'u_e'}\right] - \overline{p'\frac{\partial u_e'}{\partial x_e}} - P_B + \bar{\rho}\varepsilon - \overline{u_e''}\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_e} + \underbrace{\overline{u_i''}\frac{\partial \bar{\tau}_{ie}}{\partial x_e} + \frac{\partial \overline{u_i''}\,\bar{\tau}_{ie}}{\partial x_e}}_{\bar{\tau}_{ie}\frac{\partial \overline{u_i''}}{\partial x_e}}$$

$$= S_{\check{R}_t}$$

$\Rightarrow$ La modélisation de l'équation de conservation de l'énergie totale : repose sur la modélisation de $S_{\check{R}_t}$

Si on néglige :

- $\overline{p'u_e'} \simeq 0$ càd la diffusion de pression $\frac{\partial}{\partial x_e}\left(\overline{p'u_e'}\right)$
- $\Phi_p = \overline{p'\frac{\partial u_e'}{\partial x_e}} \simeq 0$ càd la corrélation pression-dilatation } effets directs de compressibilité
- $\overline{u_e''} \simeq 0$

alors $S_{\check{R}_t} = -P_B + \bar{\rho}\varepsilon$

3/ Equation de transport exacte pour le taux de dissipation de l'énergie cinétique turbulente : $\bar{\rho}\varepsilon$:

En écoulement compressible, même avec la moyenne de Favre, cette équation est extrêmement complexe. C'est pourquoi, on utilise une extension compressible simple via $\bar{\rho}$ de l'équation modélisée en écoulement incompressible (chap. 3, §5), c'est à dire que les effets directs de compressibilité seront négligés.

4/ Fermeture des équations de transport de l'énergie totale, énergie cinétique turbulente k, et de son taux de dissipation ε.

4-1 Energie totale :

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\bar{\rho}\breve{h}_t - \bar{p}\right) + \frac{\partial}{\partial x_e}\left(\bar{\rho}\tilde{u}_e \breve{h}_t\right) = \frac{\partial}{\partial x_e}\left(\bar{\tau}_{ie}\tilde{u}_i - \bar{\rho}\widetilde{u_i''u_e''} - \left(\bar{q}_e + \bar{\rho}\widetilde{h''u_e''}\right) + \overline{p u_e''}\right) + S_R$$

a) Fermeture du flux de chaleur moléculaire :

En négligeant les effets des fluctuations de température sur le flux de chaleur moléculaire (car nous ne savons pas calculer simplement T''), nous avons :

$$\bar{q}_e = -\breve{\kappa}(\tilde{T})\frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_e}$$

avec $\breve{\kappa}(\tilde{T}) = \kappa_{273}\dfrac{\breve{\mu}(\tilde{T})}{\mu_{273}}\left[1 + 0.00023\,(\tilde{T} - 273.15)\right]$

et $\kappa_{273} = 0.0242\ W m^{-1} K^{-1}$; $\mu_{273} = 17.11\ 10^{-6}\ Pa.s$

b) Fermeture du flux de chaleur turbulent

Par analogie avec $\bar{q}_e$, on utilise une fermeture de type premier gradient avec un nombre de Prandtl turbulent constant

$$\bar{\rho}\widetilde{h''u_e''} = -\kappa_T\frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_e} \qquad \text{avec } \kappa_T = \frac{\mu_T C_p}{Pr_T}$$

Rq : prendre cette hyp avec de + $Pr_T = cte$ $\quad Pr_T = 0.9$

$Pr_T = \dfrac{\nu_T}{\alpha_T}$ par analogie avec $Pr = \dfrac{\nu}{\alpha}$ $\quad C_p = \dfrac{\gamma}{\gamma - 1} R_g$, $\gamma = 1.4$; $R_g = 287.04$

$= \nu_T\left(\dfrac{\bar{\rho} C_p}{\kappa_T}\right)$; α_T : diffusivité thermique tourbillonnaire (ou turbulent) $\quad \mu_T = C_\mu \breve{\mu}(\tilde{T}) Re_T$ (Boussinesq)

κ_T : conductivité thermique turbulente $\quad Re_T = \dfrac{k^2}{\breve{\nu}\varepsilon}$; $\breve{\nu} = \dfrac{\breve{\mu}}{\bar{\rho}}$

$Pr_T = 0.9 \Rightarrow$ couche limite thermique turbulente $= 0.9$ couche limite dynamique turbulente $\rightarrow$ Influence température paroi (AIAA paper 2003-3465)

→ on peut faire varier d_T en prenant un modèle à 2 équations de transport $\widetilde{T''T''}$ et sa destruction ε_θ (par analogie avec modèle $k-\varepsilon$ pour calculer ν_T(ou μ_T)) ou bien calculer une équation vectorielle pour le flux de chaleur turbulent $\widetilde{T''u_i''}$, $\widetilde{T''T''}$ et sa dissipation ε_θ (par analogie avec modèle RSM) pour s'affranchir de l'introduction de la grandeur non physique d_T. Il existe aussi des modèles algébriques (cf page 47')

c) Fermeture des tensions visqueuses $\overline{\tau_{ie}}$:

En considérant l'hypothèse de Stokes $2\lambda + 3\mu = 0$, et en négligeant les effets directs de compressibilité, alors

$$\overline{\tau_{ie}} = \breve{\mu}(\tilde{T})\left[\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_e} + \frac{\partial \tilde{u}_e}{\partial x_i}\right] - \frac{2}{3}\breve{\mu}(\tilde{T})\frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial x_k}\delta_{ie}$$

$$\text{avec } \breve{\mu}(\tilde{T}) = \mu_{273}\left(\frac{\tilde{T}}{273.15}\right)^{3/2}\frac{110.4 + 273.15}{110.4 + \tilde{T}}$$

d) S_k sera calculé avec l'équation de transport pour k

e) nous négligeons $\overline{p u''} \simeq 0$

4.2 Fermeture du tenseur de Reynolds (présent dans équation de quantité de mouvement et de l'énergie cinétique k)

Hypothèse de Boussinesq en compressible

$$-\bar{\rho}\widetilde{u_i'' u_e''} = \mu_T\left[\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_e} + \frac{\partial \tilde{u}_e}{\partial x_i}\right] - \frac{2}{3}\mu_T\frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial x_k}\delta_{ie} - \frac{2}{3}\bar{\rho}k\delta_{ie}$$

$$\text{avec } \mu_T = c_\mu \breve{\mu} Re_T \;;\; c_\mu = 0.09 \;;\; Re_T = \frac{k^2}{\breve{\nu}\varepsilon}$$

4.3 Fermeture de l'équation de transport pour l'énergie cinétique k

$$\underbrace{\frac{\partial \bar{\rho}k}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho}k\tilde{u}_e}{\partial x_e}}_{\text{convection}} = -\frac{\partial}{\partial x_e}\Bigg[\underbrace{\bar{\rho}\frac{\widetilde{u_i'' u_i'' u_e''}}{2}}_{\text{diffusion turbulente due fluct. vitesse}} + \underbrace{\overline{p u_e''}}_{\substack{\overline{p'u_e''} + \bar{p}\,\overline{u_e''} \\ \overline{p'u_e''} \text{ diffusion pression}}} \underbrace{- \overline{u_i'\tau_{ie}}}_{\substack{\text{diffusion moléculaire} \\ \text{effets directs compressibilité}}} - \underbrace{\overline{u_i''}\,\overline{\tau_{ie}}}_{\text{effets directs compressibilité}}\Bigg]$$

$$+ \underbrace{\overline{p\frac{\partial u_e''}{\partial x_e}}}_{\substack{\bar{p}\frac{\partial \overline{u_e''}}{\partial x_e} + \overline{p'\frac{\partial u_e''}{\partial x_e}} \\ \bar{p}\frac{\partial \overline{u_e''}}{\partial x_e} \text{ effets directs compressibilité} \\ \overline{p'\frac{\partial u_e''}{\partial x_e}} \text{ pression-dilatation}}} \underbrace{- \bar{\rho}\widetilde{u_i'' u_e''}\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_e}}_{\text{Production}} = \underbrace{\overline{\tau_{ie}\frac{\partial u_i''}{\partial x_e}}}_{\substack{\overline{\tau_{ie}'\frac{\partial u_i''}{\partial x_e}} + \overline{\tau_{ie}}\frac{\partial \overline{u_i''}}{\partial x_e} \\ \overline{\tau_{ie}'\frac{\partial u_i''}{\partial x_e}} \text{ dissipation} \\ \overline{\tau_{ie}}\frac{\partial \overline{u_i''}}{\partial x_e} \text{ effets directs compressibilité}}}$$

d) Fermeture de la dissipation $\bar{\rho}\tilde{\varepsilon}_{ij}$

Sachant que dans un écoulement à haut-Reynolds ($Re_T \geq 100$), les grosses structures ne sont pas affectées par la viscosité et que les petites structures peuvent être considérées localement isotropes,

l'hypothèse d'isotropie locale, conduit à

$$\bar{\rho}\tilde{\varepsilon}_{ij} = \frac{2}{3}\delta_{ij}\,\bar{\rho}\tilde{\varepsilon}$$

⇒ Finalement l'équation aux tensions de Reynolds modélisée est :

$$\underbrace{\frac{\partial(\bar{\rho}\widetilde{u_i''u_j''})}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{\rho}\widetilde{u_i''u_j''}\tilde{u}_e)}{\partial x_e}}_{\text{Convection}} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_e}\left[\left(\check{\mu}(\tilde{T})\delta_{ke} + c_s\frac{k}{\varepsilon}\bar{\rho}\widetilde{u_k''u_e''}\right)\frac{\partial\widetilde{u_i''u_j''}}{\partial x_k}\right]}_{\text{diffusion } d_{ij}}$$

$$\underbrace{-c_1\bar{\rho}\tilde{\varepsilon}a_{ij} - c_2\left[P_{ij} - \frac{2}{3}P_k\delta_{ij}\right]}_{\text{redistribution } \Phi_{ij}} + \underbrace{P_{ij}}_{\text{Production}} - \underbrace{\frac{2}{3}\bar{\rho}\tilde{\varepsilon}\delta_{ij}}_{\text{dissipation } \bar{\rho}\tilde{\varepsilon}_{ij}}$$

avec $P_{ij} = -\bar{\rho}\widetilde{u_i''u_e''}\frac{\partial\tilde{u}_j}{\partial x_e} - \bar{\rho}\widetilde{u_j''u_e''}\frac{\partial\tilde{u}_i}{\partial x_e}$; $c_s = 0.22$

3/ Fermeture de l'équation de transport du taux de dissipation de l'énergie cinétique turbulente : $\bar{\rho}\tilde{\varepsilon}$

De même que pour le modèle k-ε de Launder-Sharma haut-Reynolds, nous allons utiliser l'extension compressible directe via $\bar{\rho}$ uniquement - Cependant, par analogie avec la diffusion de l'équation aux tensions de Reynolds, nous avons une diffusion tensorielle (car nous pouvons calculer le tenseur de Reynolds dans les modèles RSM).

$$\frac{\partial\bar{\rho}\tilde{\varepsilon}}{\partial t} + \frac{\partial\bar{\rho}\tilde{u}_e\tilde{\varepsilon}}{\partial x_e} = \frac{\partial}{\partial x_e}\left[\left(\check{\mu}(\tilde{T})\delta_{ke} + c_\varepsilon\frac{k}{\varepsilon}\bar{\rho}\widetilde{u_k''u_e''}\right)\frac{\partial\tilde{\varepsilon}}{\partial x_k}\right]$$

$$+ c_{\varepsilon_1}P_k\frac{\tilde{\varepsilon}}{k} - c_{\varepsilon_2}\bar{\rho}\tilde{\varepsilon}\frac{\tilde{\varepsilon}}{k}$$

avec $P_k = \underbrace{-\bar{\rho}\widetilde{u_i''u_e''}\frac{\partial\tilde{u}_i}{\partial x_e}}_{\text{terme exact}}$; $\begin{matrix} c_{\varepsilon_1} = 1.44 \\ c_{\varepsilon_2} = 1.92 \end{matrix}$; $c_\varepsilon = 0.18$

$= \frac{1}{2}P_{ii}$

Chapitre VI

Modélisation Statistique de la turbulence
Ecoulement Compressible à bas - Reynolds
Influence des Parois Solides

A faible nombre de Reynolds, les gros tourbillons (producteurs) sont influencés par la viscosité moléculaire, et les petits tourbillons (dissipateurs) sont influencés par le mouvement moyen ⇒ on ne peut plus parler d'isotropie locale pour les petites structures.

A proximité d'une paroi, les effets dus à la viscosité sont importants, et l'écoulement est fortement anisotrope et inhomogène.
Il faut modéliser au mieux le comportement asymptotique des variables et le fait que les fluctuations de la composante perpendiculaire à la paroi sont amorties plus rapidement que les autres : c'est l'écho pariétal.

VI.1 Modèle k-ε^* de Launder - Sharma (1974).

1. A haut nombre de Reynolds, c_μ est une constante ($c_\mu = 0.09$).
A bas nombre de Reynolds, c_μ va être amortie jusqu'à la paroi avec une fonction f_μ qui dépend du Re_T

$$\Rightarrow \quad \mu_T = c_\mu f_\mu \mu Re_T^*$$

avec $$f_\mu = \exp\left[-3.4/(1 + Re_T^*/50)^2\right]$$

$$Re_T^* = \frac{k^2}{\nu \varepsilon^*}$$

ε^* = taux de dissipation modifié

$$\bar{\rho}\varepsilon^* = \bar{\rho}\varepsilon - D \quad \text{avec} \quad D = 2\mu (\text{grad}\sqrt{k})^2$$

Donc $\varepsilon^* \to 0$ à la paroi
$\varepsilon^* = \varepsilon$ pour $y^+ \geq 60$.

7)

2. Aucune modification dans l'équation de conservation de l'énergie cinétique turbulente k, sauf bien sûr le calcul de P_k avec μ_T (cf. 1.)

3. Dans l'équation de conservation du taux de dissipation, nous allons prendre ε^* à la place de ε, car c'est numériquement plus stable.

→ La constante $c_{\varepsilon 2}$ est amortie à la paroi par une fonction $f_{\varepsilon 2}$ calée pour prédire correctement la phase terminale de décroissance d'une turbulence de grille

$$f_{\varepsilon 2} = 1 - 0.3 \exp\left[-(R_{eT}^*)^2\right]$$

→ Le terme de Production $P_\varepsilon^1 + P_\varepsilon^2 + P_\varepsilon^3$ due à l'action du mouvement moyen :

$$P_\varepsilon^1 + P_\varepsilon^2 + P_\varepsilon^3 = E = \frac{2\mu\mu_T}{\bar{\rho}}\left(\frac{\partial^2 \tilde{u}_i}{\partial x_\ell \partial x_\ell}\right)^2$$

Ce terme doit modéliser au mieux le profil de k sur plaque plane dans la zone tampon, via le profil (ou plus exactement le pic) de ε^* qui doit être correctement positionné.

Finalement le modèle k-ε^* de Launder-Sharma (1974) est :

$$\frac{\partial \bar{\rho} k}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho}\tilde{u}_\ell k}{\partial x_\ell} = \frac{\partial}{\partial x_\ell}\left[\left(\check{\mu}(\tilde{T}) + \frac{\mu_T}{\sigma_k}\right)\frac{\partial k}{\partial x_\ell}\right] + P_k - \bar{\rho}\varepsilon$$

avec $P_k = -\bar{\rho}\widetilde{u_i''u_\ell''}\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_\ell}$; $-\bar{\rho}\widetilde{u_i''u_\ell''} = \mu_T\left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_\ell} + \frac{\partial \tilde{u}_\ell}{\partial x_i}\right) - \frac{2}{3}\mu_T\frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial x_k}\delta_{i\ell} - \frac{2}{3}\bar{\rho}k\delta_{i\ell}$

$\mu_T = c_\mu f_\mu \check{\mu} R_{eT}^*$; $f_\mu = \exp\left[-3.4/(1 + 0.02R_{eT}^*)^2\right]$; $R_{eT}^* = \frac{k^2}{\check{\nu}\varepsilon^*}$

$\bar{\rho}\varepsilon^* = \bar{\rho}\varepsilon - D$; $D = 2\mu(\mathrm{grad}\sqrt{k})^2$; $c_\mu = 0.09$; $\sigma_k = 1$

$$\frac{\partial \bar{\rho}\varepsilon^*}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho}\tilde{u}_\ell\varepsilon^*}{\partial x_\ell} = \frac{\partial}{\partial x_\ell}\left[\left(\check{\mu}(\tilde{T}) + \frac{\mu_T}{\sigma_\varepsilon}\right)\frac{\partial \varepsilon^*}{\partial x_\ell}\right] + c_{\varepsilon 1}P_k\frac{\varepsilon^*}{k}$$

$$- c_{\varepsilon 2} f_{\varepsilon 2}\bar{\rho}\frac{\varepsilon^{*2}}{k} + \underbrace{\frac{2\check{\mu}\mu_T}{\bar{\rho}}\left(\frac{\partial^2 \tilde{u}_i}{\partial x_\ell \partial x_\ell}\right)^2}_{E}$$

avec $\sigma_\varepsilon = 1.3$; $c_{\varepsilon 1} = 1.44$; $c_{\varepsilon 2} = 1.92$

$f_{\varepsilon 2} = 1 - 0.3\exp\left[-(R_{eT}^*)^2\right]$

c) Fermeture du terme de redistribution Φ_{ij}

$$\Phi_{ij} = \overline{2\rho' D'_{ij}} - \frac{2}{3}\overline{p' \frac{\partial u'_k}{\partial x_k}}\delta_{ij}$$

Rhou (1945) a mis en évidence : $\Phi_{ij} = \Phi_{ij1} + \Phi_{ij2}$

→ Φ_{ij1} est un terme non-linéaire engendré par les fluctuations de vitesse (terme lent) responsable du retour à l'isotropie en redistribuant l'énergie sur les tensions de Reynolds.

Rotta (1951) a proposé : $\Phi_{ij1} = -C_1 \bar{\rho} \varepsilon a_{ij}$

avec $C_1 \in [1,5]$; $a_{ij} = \frac{\widetilde{u_i'' u_j''}}{k} - \frac{2}{3}\delta_{ij}$

↑ tenseur d'anisotropie des tensions de Reynolds

Ce tenseur a_{ij} possède 3 invariants

$A_1 = a_{ii} = 0$; $A_2 = a_{ik} a_{ki}$; $A_3 = a_{ik} a_{kj} a_{ji}$

$= \frac{2k}{k} - 2 = 0$

→ Φ_{ij2} est un terme linéaire engendré par la présence du gradient de vitesse moyenne (terme rapide)

Naot (1970) a proposé un modèle comparable au modèle de Rotta pour Φ_{ij1}, rendant ainsi Φ_{ij2} responsable de l'isotropisation du tenseur de production P_{ij}

$$\Phi_{ij2} = -C_2 \left(P_{ij} - \frac{2}{3} P_k \delta_{ij}\right) \quad ; \quad P_k = \frac{P_{ii}}{2}$$

$C_2 = -0.6$ (pour une turbulence isotrope).

Donc $\Phi_{ij} = -C_1 \bar{\rho} \varepsilon a_{ij} - C_2 \left(P_{ij} - \frac{2}{3} P_k \delta_{ij}\right)$

$C_1 \in [1,5]$; $C_2 = -0.6$.

5°) (a) + (b) $\alpha G - \frac{\varepsilon}{k} \overline{u_i' u_j' u_k'}$

D'où finalement :

$$\overline{u_i' u_j' u_k'} = -C_s \frac{k}{\varepsilon} \left\{ \overline{u_i' u_\ell'} \frac{\partial \overline{u_j' u_k'}}{\partial x_\ell} + \overline{u_j' u_\ell'} \frac{\partial \overline{u_k' u_i'}}{\partial x_\ell} + \overline{u_k' u_\ell'} \frac{\partial \overline{u_i' u_j'}}{\partial x_\ell} \right\}$$

Remarque = Carmack - Leal - Seinfeld (1978) trouvent que bien que les hypothèses pour arriver à cette modélisation soient nombreuses et restrictives, c'est avec la modélisation de Lumley (1978) parmi les meilleurs dans plusieurs types d'écoulements.

Remarque : On peut considérer que la modélisation proposée par Hanjalić - Launder est une extension du modèle de Daly - Harlow, pour respecter la symétrie des indices.

→ Lumley (1978)

A partir de travaux de Lumley et Kajed - Nami (1974), Carmack et al. (1978) a proposé une expression mathématique à 19 paramètres au 2nd ordre en anisotropie et au 3ème ordre en inhomogénéité - et Lumley (1978) propose :

$$d_{ij}^{\sigma} = \frac{-\partial}{\partial x_\ell} \left[\overline{\rho u_i'' u_j'' u_\ell''} \right] = \frac{\partial}{\partial x_\ell} \left[C_{s1} \frac{k}{\varepsilon} G_{ij\ell} + C_{s2} \frac{k}{\varepsilon} \left[G_i \delta_{j\ell} + G_j \delta_{i\ell} + G_\ell \delta_{ij} \right] \right]$$

avec $C_{s1} = \frac{1}{3 C_{sL}}$, $C_{s2} = \frac{1}{3 C_{sL}} \left[\frac{C_{sL} - 1}{4 C_{sL} + 5} \right]$; $C_{sL} = 3.4$ (Schwarz - Bradshaw, 1994)

$$G_{ijk} = \bar{\rho} \widetilde{u_i'' u_\ell''} \frac{\partial \widetilde{u_j'' u_k''}}{\partial x_\ell} + \bar{\rho} \widetilde{u_j'' u_\ell''} \frac{\partial \widetilde{u_i'' u_k''}}{\partial x_\ell} + \bar{\rho} \widetilde{u_k'' u_\ell''} \frac{\partial \widetilde{u_i'' u_j''}}{\partial x_\ell}$$

$G_i = G_{imm}$; $G_j = G_{jmm}$; $G_k = G_{kmm}$

Remarque : la base de Carmack (1975) contient tous les modèles de la littérature

Démonstration de cette modélisation proposée par Hanjalić-Launder (1972).

L'équation de transport exacte pour la corrélation triple de vitesse $T_{ijk} = \overline{u_i' u_j' u_k'}$ en écoulement incompressible.

$$\underbrace{\frac{\partial T_{ijk}}{\partial t} + \bar{u}_e \frac{\partial T_{ijk}}{\partial x_e}}_{\text{Convection}} = \underbrace{-\frac{\partial}{\partial x_e}\left[\frac{1}{\rho}\left(\overline{u_i' u_j' p'}\,\delta_{ek} + \overline{u_i' u_k' p'}\,\delta_{ej} + \overline{u_j' u_k' p'}\,\delta_{ei}\right)\right]}_{\text{diffusion turbulente due aux fluctuations de pression (a)}}$$

$$\underbrace{-\frac{\partial \overline{u_i' u_j' u_k' u_e'}}{\partial x_e}}_{\substack{\text{diffusion turbulente due aux fluctuations de vitesse III}}} + \underbrace{\nu \frac{\partial^2 T_{ijk}}{\partial x_e^2}}_{\text{diffusion visqueuse}} \underbrace{- \left[T_{ije}\frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_e} + T_{jke}\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_e} + T_{kie}\frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_e}\right]}_{\text{Production par action du mouvement moyen I}}$$

$$\underbrace{- 2\nu\left[\overline{u_i' \frac{\partial u_j'}{\partial x_e}\frac{\partial u_k'}{\partial x_e}} + \overline{u_j' \frac{\partial u_i'}{\partial x_e}\frac{\partial u_k'}{\partial x_e}} + \overline{u_k' \frac{\partial u_i'}{\partial x_e}\frac{\partial u_j'}{\partial x_e}}\right]}_{\text{Destruction}}$$

$$\underbrace{+\frac{1}{\rho}\left[\overline{p' \frac{\partial u_i' u_j'}{\partial x_k}} + \overline{p' \frac{\partial u_i' u_k'}{\partial x_j}} + \overline{p' \frac{\partial u_j' u_k'}{\partial x_i}}\right]}_{\text{(b)}} + \underbrace{\overline{u_k' u_j'}\frac{\partial \overline{u_i' u_e'}}{\partial x_e} + \overline{u_k' u_i'}\frac{\partial \overline{u_j' u_e'}}{\partial x_e} + \overline{u_i' u_j'}\frac{\partial \overline{u_k' u_e'}}{\partial x_e}}_{\text{II}}$$

$$\therefore \quad (a) + (b) = \underline{\text{IV}}$$

Hypothèses :

1°) Ecoulement à haut nombre de Reynolds turbulent :

⇒ diffusion visqueuse est négligeable

+ destruction négligée

2°) I est négligeable dans les régions où la corrélation triple est importante d'après résultats expérimentaux obtenus dans des écoulements turbulents dissymétriques.

3°) On néglige le terme de transport convectif.

4°) Millionshtchikov (1941)
Quand les corrélations triples ne sont pas importantes et que leurs propriétés de distribution sont proches d'une gaussienne, alors on peut écrire :

$$\overline{u_i' u_j' u_k' u_e'} = \overline{u_i' u_j'}\,.\,\overline{u_k' u_e'} + \overline{u_i' u_k'}\,.\,\overline{u_j' u_e'} + \overline{u_i' u_e'}\,.\,\overline{u_k' u_j'}$$

d'où $\text{II} + \text{III} = -\left[\overline{u_i' u_e'}\frac{\partial \overline{u_j' u_k'}}{\partial x_e} + \overline{u_j' u_e'}\frac{\partial \overline{u_k' u_i'}}{\partial x_e} + \overline{u_k' u_e'}\frac{\partial \overline{u_i' u_j'}}{\partial x_e}\right]$

V.2 Modèles aux tensions de Reynolds - RSM - (ou au second ordre)

(Launder - Shima; 1989)

Ces modèles sont les plus évolués (statistique), ils résolvent les 6 équations aux tensions de Reynolds (au lieu de celle pour k dans les modèles k-ε) qui donnera l'échelle de la vitesse caractéristique de la turbulence, et une équation pour ε qui donnera l_T.

1// Fermeture de l'équation de conservation de l'énergie totale -

Aucune modification par rapport au modèle k-ε, sauf pour $S_k = -\bar{\rho}\widetilde{u_i''u_e''}\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_e} - \bar{\rho}\varepsilon$, où le tenseur de Reynolds $-\bar{\rho}\widetilde{u_i''u_e''}$ est maintenant un terme exact calculé directement avec son équation de transport (pas besoin de l'hypothèse de Boussinesq).

Remarque : il reste quand même μ_T dans la modélisation du flux de chaleur turbulent -
et les effets directs de compressibilité ainsi que les termes de diffusion de pression et corrélation pression-dilatation ont été négligés

2// Fermeture de l'équation aux tensions de Reynolds

En négligeant les effets directs de compressibilité k_{ij} et le terme de pression - dilatation, l'équation exacte se réduit à :

$$\underbrace{\frac{\partial \bar{\rho}\widetilde{u_i''u_j''}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_e}\left(\bar{\rho}\widetilde{u_i''u_j''}\tilde{u}_e\right)}_{C_{ij}} = \underbrace{-\frac{\partial}{\partial x_e}\left[\bar{\rho}\widetilde{u_i''u_j''u_e''} + \overline{p'u_j'}\delta_{ie} + \overline{p'u_i'}\delta_{je}\right]}_{d_{ij}^T = d_{ij}^{\sigma} + d_{ij}^{p}}$$

$$+ \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_e}\left[\overline{u_i'\tau_{je}'} + \overline{u_j'\tau_{ie}'}\right]}_{d_{ij}^{\nu}} + \underbrace{\overline{p'\left(2D_{ij}' - \frac{2}{3}\frac{\partial u_k'}{\partial x_k}\delta_{ij}\right)}}_{\Phi_{ij}}$$

$$\underbrace{-\left[\bar{\rho}\widetilde{u_i''u_e''}\frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_e} + \bar{\rho}\widetilde{u_j''u_e''}\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_e}\right]}_{P_{ij}} - \underbrace{\left[\overline{\tau_{je}'\frac{\partial u_i'}{\partial x_e}} + \overline{\tau_{ie}'\frac{\partial u_j'}{\partial x_e}}\right]}_{\bar{\rho}\varepsilon_{ij}}$$

a) La diffusion moléculaire

Par analogie avec l'équation pour k, on a :

$$d_{ij}^{\nu} = \frac{\partial}{\partial x_e}\left[\tilde{\mu}(\tilde{T})\frac{\partial \widetilde{u_i''u_j''}}{\partial x_e}\right]$$

b) Fermeture de la diffusion turbulente

De même que dans les modèles $k-\varepsilon$, la diffusion de pression d_{ij}^P est très souvent négligé. Nous verrons dans le chap. VI son importance notamment proche paroi.

Donc on ne modélise ici que la diffusion de vitesse, c'est à dire la divergence de la corélation triple de vitesse : $\widetilde{u_i'' u_j'' u_\ell''}$ et Launder-Shima (1989) utilise le modèle de Daly-Harlow (1970)

→ Daly-Harlow (1970) : c'est le modèle le + simple qui exprime le transport diffusif turbulent de $u_i'' u_j''$ en fonction de son gradient

$$d_{ij}^v = -\frac{\partial}{\partial x_\ell}\left(\bar\rho \widetilde{u_i'' u_j'' u_\ell''}\right) = \frac{\partial}{\partial x_\ell}\left[\underbrace{c_s \frac{k}{\varepsilon}\bar\rho \widetilde{u_\ell'' u_k''}}_{\text{"} \nu \text{ remplace } \frac{\mu_T}{\sigma_k} \text{"}} \frac{\partial \widetilde{u_i'' u_j''}}{\partial x_k}\right] ; \; c_s = 0.22$$

Rq : le terme $\widetilde{u_i'' u_j'' u_\ell''}$ est symétrique par rapport aux indices i, j, ℓ. or la modélisation de Daly-Harlow ne l'est pas !

Rq : le terme $d_{ij}^T = d_{ij}^v + d_{ij}^?$ n'est pas dans sa forme exacte symétrique par rapport aux indices

⇒ Launder (1984) a suggéré que le modèle de Daly-Harlow n'est pas pour d_{ij}^v mais pour $d_{ij}^T = d_{ij}^v + d_{ij}^P$, c'est à dire (qu'une partie au moins) de la diffusion de pression $d_{ij}^?$ n'est pas en réalité négligé !
On verra sur des exemples qu'il avait raison !

→ Hanjalić-Launder (1972)

Ils ont proposé une modélisation de la corélation triple de vitesse qui respecte la symétrie des indices. Par conséquent en prenant cette modélisation on néglige bien la diffusion de pression si on ne la modélise pas explicitement.

Cette modélisation est :

$$d_{ij}^v = \frac{\partial}{\partial x_\ell}\left[-\bar\rho \widetilde{u_i'' u_j'' u_\ell''}\right] = \frac{\partial}{\partial x_\ell}\left[c_s \frac{k}{\varepsilon}\left(\bar\rho \widetilde{u_i'' u_k''}\frac{\partial \widetilde{u_j'' u_\ell''}}{\partial x_k} + \bar\rho \widetilde{u_j'' u_k''}\frac{\partial \widetilde{u_\ell'' u_i''}}{\partial x_k} + \bar\rho \widetilde{u_\ell'' u_k''}\frac{\partial \widetilde{u_i'' u_j''}}{\partial x_k}\right)\right]$$

avec $c_s = 0.11$

Remarque : Hinz (1969) avait déjà proposé cette forme tensoriellement correcte, sans donner de valeur à c_s.

L'équation pour l'énergie cinétique turbulente, à haut nombre de Reynolds en écoulement compressible, modélisée est :

$$\underbrace{\frac{\partial \bar\rho k}{\partial t} + \frac{\partial \bar\rho \tilde u_e k}{\partial x_e}}_{\text{convection } C_k} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_e}\left[\left(\check\mu(\tilde T) + \frac{\mu_T}{\sigma_k}\right)\frac{\partial k}{\partial x_e}\right]}_{\text{diffusion } d_k} \underbrace{- \bar\rho \widetilde{u_i'' u_e''}\frac{\partial \tilde u_i}{\partial x_e}}_{\text{Production } P_k} \underbrace{- \bar\rho \varepsilon}_{\text{dissipation}}$$

$$- \bar\rho \widetilde{u_i'' u_e''} = \mu_T\left(\frac{\partial \tilde u_i}{\partial x_e} + \frac{\partial \tilde u_e}{\partial x_i}\right) - \frac{2}{3}\mu_T \frac{\partial \tilde u_k}{\partial x_k}\delta_{ie} - \frac{2}{3}\bar\rho k \delta_{ie} \qquad \underbrace{\quad}_{-S_k}$$

$\mu_T = C_\mu \check\mu \, Re_T$; $C_\mu = 0.09$; $\sigma_k \simeq 1$; $Re_T = \frac{k^2}{\nu\varepsilon}$

c'est donc une extension directe en compressible (via $\bar\rho$ uniquement) de la modélisation incompressible. (et en négligeant les effets directs de compressibilité)

4.4 Fermeture de l'équation de transport du taux de dissipation de l'énergie cinétique : $\bar\rho\varepsilon$

De même, nous allons effectuer une extension compressible simple et directe (via $\bar\rho$) de la modélisation incompressible.

Ainsi, nous avons :

$$\underbrace{\frac{\partial \bar\rho \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial (\bar\rho \tilde u_e \varepsilon)}{\partial x_e}}_{\text{convection } C_\varepsilon} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_e}\left[\left(\check\mu(\tilde T) + \frac{\mu_T}{\sigma_\varepsilon}\right)\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_e}\right]}_{\text{diffusion } d_\varepsilon} + \underbrace{C_{\varepsilon 1} P_k \frac{\varepsilon}{k}}_{\text{Production } P_\varepsilon} - \underbrace{C_{\varepsilon 2}\bar\rho\varepsilon\frac{\varepsilon}{k}}_{\text{destruction } D_\varepsilon}$$

avec $\sigma_\varepsilon = 1.3$; $C_{\varepsilon 1} = 1.44$; $C_{\varepsilon 2} = 1.92$

$\mu_T = C_\mu \check\mu(\tilde T) Re_T$; $C_\mu = 0.09$; $Re_T = \frac{k^2}{\nu\varepsilon}$

$P_k = \underbrace{-\bar\rho \widetilde{u_i'' u_e''}}_{\text{hyp. Boussinesq}} \frac{\partial \tilde u_i}{\partial x_e}$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\frac{\partial \bar\rho \tilde k}{\partial t} + \frac{\partial \bar\rho \tilde k \tilde u_e}{\partial x_e}}_{\text{Convection}} = \underbrace{-\frac{\partial}{\partial x_e}\left[\bar\rho \widetilde{\frac{u_i'' u_i'' u_e''}{2}} + \overline{p' u_e'} - \overline{u_i' \tau_{ie}'}\right]}_{\text{diffusion}} + \underbrace{\overline{p' \frac{\partial u_e'}{\partial x_e}}}_{\text{pression - dilatation}}$$

$$\underbrace{-\bar\rho \widetilde{u_i'' u_e''} \frac{\partial \tilde u_i}{\partial x_e}}_{P_k} \underbrace{- \overline{\tau_{ie}' \frac{\partial u_i'}{\partial x_e}}}_{\rho\varepsilon} - \frac{\partial}{\partial x_e}\left[\bar p \overline{u_e''}\right] + \bar p \overline{\frac{\partial u_e''}{\partial x_e}} + \frac{\partial}{\partial x_e}\left[\overline{u_i''} \bar\tau_{ie}\right] + \overline{\tau_{ie}} \overline{\frac{\partial u_i''}{\partial x_e}}$$

$$\underbrace{- \overline{u_e''} \frac{\partial \bar p}{\partial x_e} + \overline{u_i''} \frac{\partial \bar\tau_{ie}}{\partial x_e}}_{\text{effets directs compressibilité}}$$

→ on retrouve Eq (2) p. 44.

a) On néglige les effets directs de compressibilité' et les termes : $\overline{p' u_e'} \simeq 0$ (corrélation pression - vitesse qui interviennent dans diffusion de pression du tenseur de Reynolds)

$\overline{p' \frac{\partial u_e'}{\partial x_e}} \simeq 0$ (corrélation pression - dilatation)

ce qui revient à négliger $\overline{p \frac{\partial u_e''}{\partial x_e}}$ et $\overline{\tau_{ie}} \overline{\frac{\partial u_i''}{\partial x_e}}$ présent dans S_k

$$\Rightarrow \boxed{S_k = -\left[-\bar\rho \widetilde{u_i'' u_e''} \frac{\partial \tilde u_i}{\partial x_e} - \bar\rho \tilde\varepsilon\right]}$$ l'équation pour énergie totale est fermée.

avec $-\bar\rho \widetilde{u_i'' u_e''}$ déterminé avec hypothèse de Boussinesq dans les modèles à 2 équations de transport.

b) La diffusion moléculaire

Elle est modélisée par analogie avec la fermeture en écoulement incompressible :

$$d_k^{\nu} = \frac{\partial}{\partial x_e}\left[\check\mu(\tilde T) \frac{\partial k}{\partial x_e}\right]$$

c) La diffusion turbulente :

De même, nous négligeons la diffusion de pression, et la corrélation triple de vitesse est modélisé par extension direct de la modélisation incompressible, soit

$$d_k^{T} = -\frac{\partial}{\partial x_e}\left[\bar\rho \widetilde{\frac{u_i'' u_i'' u_e''}{2}}\right] = \frac{\partial}{\partial x_e}\left[\frac{\mu_T}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_e}\right] \quad ; \quad \sigma_k \simeq 1$$

Modélisation flux de chaleur turbulent (suite)

Dans la quasi-totalité des études publiées sur des écoulements compressibles, et en particulier sur les interactions avec des ondes de choc, les flux de chaleur turbulents $\widetilde{\rho u''}$ sont modélisés par un nombre de Prandtl constant (aussi bien en LES que dans les modélisations statistiques), ou plus généralement en utilisant une analogie avec le champ dynamique, ce qui suppose que les échelles caractéristiques turbulentes thermique et dynamique soient proportionnelles. Il est évident que ceci est inexact et qu'une modélisation algébrique ou à équations de transport doit être envisagée.

Younis et al. (ASME J. Heat transfert, 2007, pp 425-433, ref 129) a développé une modélisation algébrique pour la corrélation température-vitesse en écoulement incompressible

$$\overline{u_i'T'} = -\left[C_1 \frac{k^2}{\varepsilon} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_i} + C_2 \frac{k}{\varepsilon} \overline{u_i'u_j'} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} + C_3 \frac{k^3}{\varepsilon^2} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} + C_4 \frac{k^2}{\varepsilon^2} \left(\overline{u_i'u_k'} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_k} + \overline{u_j'u_k'} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} \right) \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} \right]$$

Cette modélisation peut-être étendue en "compressible" via $\bar{\rho}$ et en utilisant la décomposition de Favre.

$$+\bar{\rho}\widetilde{u_i''T''} = -\left[C_1 \frac{k^2}{\varepsilon} \bar{\rho} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_i} + C_2 \frac{k}{\varepsilon} \bar{\rho} \widetilde{u_i''u_j''} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_j} + C_3 \frac{k^3}{\varepsilon^2} \bar{\rho} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_j} + C_4 \frac{k^2}{\varepsilon^2} \underbrace{\left(\bar{\rho} \widetilde{u_i''u_k''} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_k} + \bar{\rho} \widetilde{u_j''u_k''} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_k} \right)}_{\text{Production} - P_{ij}} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_i} \right]$$

(terme exact dans le cas de l'utilisation d'un modèle RSM)

⚠ * Il faut également retrancher $-\frac{2}{3}\rho k \delta_{ij}$ et considérer $\tilde{s}_{ij} - \frac{1}{3}\tilde{s}_{kk}\delta_{ij}$ plutôt que $\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j}$

Ainsi le flux de chaleur turbulent peut-être modélisé de la façon suivante :

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\left[-\bar{\rho} \widetilde{u''u''} \right] = -\frac{\partial}{\partial x_k}\left[\bar{\rho} C_p \widetilde{T''u''} \right]$$

Rq : on considère donc que nous avons un gaz thermodynamiquement parfait et calorifiquement parfait ($c_p = cte$)

Les coefficients C_1, C_2, C_3 et C_4 peuvent-être calibrés en utilisant DNS incomp. et compressible → ! si on suppose la présence d'onde de choc rend numériquement difficile l'implémentation de modèles algébriques performants.

VI - 2 Modèle aux tensions de Reynolds RSM de Launder-Shima (1989)

1 Equation aux tensions de Reynolds.

a) le terme de redistribution Φ_{ij}

On doit ajouter à Φ_{ij} un terme Φ_{ij}^{w} qui permet de prendre en compte l'écho pariétal

$$\Phi_{ij} = \Phi_{ij1} + \Phi_{ij2} + \underbrace{\Phi_{ij1}^{w} + \Phi_{ij2}^{w}}_{\Phi_{ij}^{w}}$$

Les modélisations employées sont très classiques, et sont fonction des normales et des distances à la paroi

- Shir (1973)

$$\Phi_{ij1}^{w} = C_1^{w} \frac{\varepsilon}{k} \left[\tilde{e} \widetilde{u_k'' u_m''} n_k n_m \delta_{ij} - \frac{3}{2} \tilde{e} \widetilde{u_k'' u_i''} n_k n_j - \frac{3}{2} \tilde{e} \widetilde{u_k'' u_j''} n_k n_i \right] f$$

avec n_i = normale à la paroi ; $C_1^{w} = -\frac{2}{3} C_1 + 1.67$

$$f = \frac{\ell_T}{2.5 y} \quad ; \quad \ell_T = \frac{k^{3/2}}{\varepsilon} \quad ; \quad C_1 = 1 + 2.58 A A_2^{1/4} \left[1 - e^{-\left(\frac{Re_T}{150}\right)^2} \right]$$

y ↑ distance à la paroi

avec $A = 1 - \frac{9}{8}(A_2 - A_3)$; $A_2 = a_{ik} a_{ki}$

$A_3 = a_{ik} a_{kj} a_{ji}$

$a_{ij} = \frac{\widetilde{u_i'' u_j''}}{k} - \frac{2}{3}\delta_{ij}$

- a_{ij} est le tenseur d'anisotropie du tenseur de Reynolds, A_2 et A_3 étant ses 2 invariants.
- A est un facteur introduit par Lumley (1978) extrêmement utile pour les modèles bas-Reynolds (uniquement RSM bien-sûr) car

$$\begin{cases} A \to 0 & \text{à la paroi (turbulence 2 composantes)} \\ A \to 1 & \text{à la sortie de la couche-limite (turbulence isotrope)} \end{cases}$$

Ainsi A et Re_T sont très souvent utilisés dans les fonctions d'amortissement à la paroi et/ou bas-Reynolds.

• Gibson - Launder (1978) par analogie avec modélisation pour Φ_{ij1}^{w} propose :

$$\Phi_{ij2}^{w} = C_2^{w} \left(\Phi_{km2} n_k n_m \delta_{ij} - \frac{3}{2} \Phi_{ik2} n_j n_k - \frac{3}{2} \Phi_{jk2} n_i n_k \right) f$$

avec $C_2^{w} = \max \left[\left(\frac{2}{3} C_2 - \frac{1}{6} \right) / C_2, 0 \right]$

$C_2 = 0.75 \sqrt{A}$

b) <u>Le terme de dissipation $\bar{\rho} \varepsilon_{ij}$</u>

A bas-Reynolds, nous ne pourrons plus considérer l'hypothèse d'isotropie locale pour les petites structures. Il faut donc modéliser la partie anisotrope du tenseur $\bar{\rho} \varepsilon_{ij}$.

Launder et Shima ont choisi de prendre en compte cette anisotropie via le coefficient C_1 du terme de redistribution lente Φ_{ij}, en faisant dépendre C_1 des invariants du tenseur d'anisotropie a_{ij}. ($C_1 = 1 + 2.58 A A_2^{1/4} \left(1 - e^{-\left(\frac{Re_T}{150}\right)^2} \right)$ selon une idée de Lumley (1978))

$\Rightarrow$ on modélise ici $\Phi_{ij} - \bar{\rho} \varepsilon_{ij}$ ensemble et

$$\Phi_{ij} - \bar{\rho} \varepsilon_{ij} = \Phi_{ij1} + \Phi_{ij1}^{w} + \Phi_{ij2} + \Phi_{ij2}^{w} - \frac{2}{3} \bar{\rho} \varepsilon \delta_{ij}$$

2. <u>Equation de transport pour le taux de dissipation</u>

Comme pour le modèle k-ε^* de Launder - Sharma (1974), nous allons considérer une équation pour le taux de dissipation modifié ε^*

$$\frac{\partial \bar{\rho} \varepsilon^*}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho} \tilde{u}_\ell \varepsilon^*}{\partial x_\ell} = \frac{\partial}{\partial x_\ell} \left[\left(\tilde{\mu}(\tilde{T}) \delta_{k\ell} + C_\varepsilon \frac{k}{\varepsilon} \bar{\rho} \widetilde{u_k'' u_\ell''} \right) \frac{\partial \varepsilon^*}{\partial x_k} \right]$$

$$+ C_{\varepsilon 1} P_k \frac{\varepsilon^*}{k} - C_{\varepsilon 2} f_{\varepsilon 2} \bar{\rho} \frac{\varepsilon^{*2}}{k} + \frac{2 \mu \mu_T}{\bar{\rho}} \left(\frac{\partial^2 \tilde{u}_i}{\partial x_\ell \partial x_\ell} \right)^2$$

$P_k = - \bar{\rho} \widetilde{u_i'' u_\ell''} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_\ell}$ est ici un terme exact

$C_{\varepsilon 1} = 1.44$, $C_{\varepsilon 2} = 1.92$, $C_\varepsilon = 0.18$; $f_{\varepsilon 2} = 1 - 0.3 \exp \left[-(Re_T^*)^2 \right]$

$Re_T^* = \frac{k^2}{\nu \varepsilon^*}$; $\mu_T = C_\mu f_\mu \bar{\mu} Re_T^*$ avec $f_\mu = \exp \left[-3.4 / (1 + Re_T^* / 50)^2 \right]$

VI - 3 Recherches en cours pour les modèles RSM bas-Reynolds

1. Inconvénients - Problèmes

Les principaux inconvénients du modèle RSM de Launder-Shima (1989) sont :

a) Présence de normale et de distance à la paroi dans le terme de redistribution pariétal Φ_{ij}^{w} : géométriquement dépendant

⇒ inapplicable dans des configurations à géométrie complexe

et impossibilité de prédire des écoulements faiblement inhomogènes loin de parois solides.

b) Plusieurs termes ne sont pas pris en compte comme :

- la diffusion de pression dans l'équation aux tensions de Reynolds
- les effets directs de compressibilité k_{ij}

c) Plusieurs termes ne sont pas correctement modélisés :

- l'anisotropie du tenseur $\bar{\rho}\varepsilon_{ij}$ qui devrait être modélisé indépendamment du terme de redistribution Φ_{ij}
- le terme de diffusion turbulente due aux fluctuations de vitesse doit être revu avec la partie due aux fluctuation de pression
- l'équation pour le taux de dissipation modifié ε^* doit être complètement revue car beaucoup trop simple (directement issue de la modélisation de l'équation pour k), en particulier les termes P_ε et D_ε

d) l'utilisation de l'hypothèse de Boussinesq pour μ_T qui est présent dans l'équation de conservation de l'énergie totale et P_ε. Il faut donc revoir la modélisation du flux de chaleur turbulent et le terme de production P_ε présent dans équation de transport pour ε^* (plus exactement ε)

(**)

⇒ Il existe plusieurs voies de recherche, sachant que a) doit à mon avis être résolu avant les autres problèmes, car un Φ_{ij}^{w} mal modélisé peut annihiler les modélisations des autres termes.

(**) $E = 2\check{\nu}\,\mu_T \dfrac{\partial^2 \tilde{u}_i}{\partial x_\ell \partial x_\ell} \dfrac{\partial^2 \tilde{u}_i}{\partial x_m \partial x_m}$ avec $\mu_T = \dfrac{c_\mu}{0.09} f_\mu \underbrace{\check{\mu}\, Re_T^*}_{\bar{\rho}\frac{k^2}{\varepsilon^*}}$ -

$= 2\check{\nu}\, c_\mu f_\mu \dfrac{k}{\varepsilon^*} \bar{\rho} k \dfrac{\partial^2 \tilde{u}_i}{\partial x_\ell \partial x_\ell} \dfrac{\partial^2 \tilde{u}_i}{\partial x_m \partial x_m}$

Certains auteurs ont proposé de remplacé $\bar{\rho} k \dfrac{\partial^2 \tilde{u}_i}{\partial x_\ell \partial x_\ell} \dfrac{\partial^2 \tilde{u}_i}{\partial x_m \partial x_m}$ (ou + exactement k) par une modélisation tensorielle (en modifiant bien évidemment le coefficient $c_\mu f_\mu$)

du style : $E = 2\check{\nu} \dfrac{k}{\varepsilon^*} c_\varepsilon^E \bar{\rho} \widetilde{u_k'' u_m''} \dfrac{\partial^2 \tilde{u}_i}{\partial x_k \partial x_\ell} \dfrac{\partial^2 \tilde{u}_i}{\partial x_m \partial x_\ell}$

cependant le comportement asymptotique de $\widetilde{u_k'' u_m''}$ et de k notamment en 3-D peut entraîner des problèmes numériques.

1/2 - Propositions (exemples)

a) Modèles RST géométriquement indépendant -

$$\Phi_{ij} - \bar{\rho}\varepsilon_{ij} = \overbrace{-C_1^H \bar{\rho}\varepsilon a_{ij}}^{\Phi^H_{ij1}} \overbrace{- C_2^H \left(P_{ij} - \frac{2}{3} P_k \delta_{ij}\right)}^{\Phi^H_{ij2}}$$

$$+ \overbrace{C_1^I \frac{\varepsilon}{k}\left[\bar{\rho}\, \overbrace{u_k'' u_m''}\, e_{Ik} e_{Im} \delta_{ij} - \frac{3}{2}\bar{\rho}\, u_k'' u_i''\, e_{Ik} e_{Ij} - \frac{3}{2}\bar{\rho}\, u_k'' u_j''\, e_{Ik} e_{Ii}\right]}^{\Phi^I_{ij1}}$$

$$+ \overbrace{C_2^I\left[\Phi^H_{km2} e_{Ik} e_{Im}\delta_{ij} - \frac{3}{2}\Phi^H_{ikj2} e_{Ik} e_{Ij} - \frac{3}{2}\Phi^H_{jkj2} e_{Ik} e_{Ii}\right]}^{\Phi^I_{ij2}} - \frac{2}{3}\bar{\rho}\varepsilon\delta_{ij}$$

avec C_1^H = C_1 de Launder-Shima (1989)

$$C_2^H = \min\left[1, 0.75 + 1.3 \max[0, A - 0.55]\right] A^{\left[\max(0.25, 0.5 - 1.3\max(0, A-0.55))\right]} \cdot \left[1 - \max\left(0, 1 - \frac{R_{eT}}{150}\right)\right]$$

$$C_1^I = 0.83 \underbrace{\left[1 - \frac{2}{3}(C_1 - 1)\right]}_{\text{forme } C_1^w \text{ de Launder-Shima}} \left\| \operatorname{grad}\left\{\frac{e_T\left[1 - e^{-\frac{R_{eT}}{30}}\right]}{1 + 2A_2^{0.8}}\right\}\right\|$$

$$C_2^I = \underbrace{\max\left[\frac{2}{3} - \frac{1}{6C_2^H}, 0\right]}_{\text{forme } C_2^w \text{ de Launder-Shima}} \left\| \operatorname{grad}\left\{\frac{e_T\left[1 - e^{-\frac{R_{eT}}{30}}\right]}{1 + 1.8 A_2^{\max(0.6, A)}}\right\}\right\|$$

b) Modélisation de la diffusion turbulente

→ Hanjalić - Launder (1972) (cf. chap V, § V-2 b))
qui respecte la symétrie des indices pour la corrélation triple de vitesse
mais où diffusion de pression négligée.

→ Lumley (1978) (cf. chap V, § V-2 b) pour la diffusion turbulente due aux fluctuations de vitesse)

Seul Lumley a proposé une modélisation pour la diffusion de pression en 1978 :

Il a montré mathématiquement qu'en écoulement homogène

$$\frac{1}{\bar{\rho}}\overline{p' u_j'} = -\frac{1}{5}\overline{u_j' u_\ell' u_\ell'}$$

c'est à dire que la diffusion de pression = -20% de la corrélation triple de vitesse.

⇒ il faut ajouter une correction de proche-paroi car l'écoulement est fortement inhomogène à la paroi.

$$d_{ij}^T = d_{ij}^{\nu} + d_{ij}^{P}$$

avec d_{ij}^{ν} Lumley (1978) → cf chap V et $c_{s_1} = 0.0935$
$c_{s_2} = 0.0115$

$$d_{ij}^{P} = \frac{\partial}{\partial x_e}\left[c_{sp}\left(\bar{\rho}\, \widetilde{u_i'' u_k'' u_k''}\, \delta_{je} + \bar{\rho}\, \widetilde{u_j'' u_k'' u_k''}\, \delta_{ie} \right)\right]$$

$$c_{sp} = 0.85\, g_{csp} \quad ; \quad g_{csp} = 1 + \min\left(0.5, A^{\max(0.25, 2(1-6A))}\right)$$

↑ fonction d'amortissement à la paroi
⇒ $c_{sp} \in [8.5\%, 12,75\%]$ au lieu de 20% proposé par Lumley.
↑ paroi ↑ autre couche-limite

→ validations de ces propositions sur :

- canal 1-D
- canal 3-D subsonique incompressible
- tuyère 3-D transsonique
- rampe de compression 2-D
- onde de choc incidente sur plaque-plane 2-D
- cascade d'aube subsonique

VI.4 Inconvénients modèles $k-\varepsilon$ (ou à 2 équations de transport) / RSM

→ hypothèse de Boussinesq qui est basée sur analogie loi de comportement pour calculer une propriété de l'écoulement

→ P_k n'est pas un terme exact

→ $\Phi_{ii} = 0$ ⇒ impossible de prendre en compte l'anisotropie de la turbulence donc mauvaise prédiction des écoulements complexes.
par ex : ne peut pas prédire de zone de recirculation importante

→ Equation pour ε beaucoup trop simple et calquée sur celle de k cet inconvénient a beaucoup plus d'importance que dans modèles RSM où le poid de l'équation pour ε est minime comparé à celui des 6 équations aux tensions de Reynolds.

→ bon résultats uniquement dans écoulements simples comme sur plaque plane.

ANNEXE

① Obtention de l'équation de transport pour

$$\varepsilon = \rho \overline{\frac{\partial u_i'}{\partial x_k} \frac{\partial u_i'}{\partial x_k}}$$

nous avons l'équation de transport pour u_i'

$$\rho \frac{D u_i'}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_e} \left[-p' \delta_{ie} + \tau_{ie}' + \rho \overline{u_i' u_e'} - \rho \bar{u}_e u_i - \rho u_e' u_i' \right] \quad (1)$$

nous allons dériver (1) par $\frac{\partial}{\partial x_k}$, puis multiplier par

$2\rho \frac{\partial u_i'}{\partial x_k}$ et enfin prendre la moyenne.

la dérivée de (1) est :

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial x_k} \left[\frac{\partial u_i'}{\partial t} + \bar{u}_e \frac{\partial u_i'}{\partial x_e} \right]} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_e} \left(-p' \delta_{ie} + \tau_{ie}' + \rho \overline{u_i' u_e'} - \rho u_e' u_i - \rho u_e' u_i' \right) \right\}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_k} \right) + \bar{u}_e \frac{\partial}{\partial x_e} \left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_k} \right) + \frac{\partial \bar{u}_e}{\partial x_k} \frac{\partial u_i'}{\partial x_e}$$

multiplions par $2\rho \frac{\partial u_i'}{\partial x_k}$, nous avons

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \frac{\partial u_i'}{\partial x_k} \frac{\partial u_i'}{\partial x_k} \right] + \bar{u}_e \frac{\partial}{\partial x_e} \left[\rho \frac{\partial u_i'}{\partial x_k} \frac{\partial u_i'}{\partial x_k} \right] + 2\rho \frac{\partial \bar{u}_e}{\partial x_k} \frac{\partial u_i'}{\partial x_e} \frac{\partial u_i'}{\partial x_k}$$

$$= 2 \frac{\rho}{\rho} \frac{\partial u_i'}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_e} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_k} \left(-p' \delta_{ie} + \tau_{ie}' + \rho \overline{u_i' u_e'} - \rho u_e' u_i - \rho u_e' u_i' \right) \right\}$$

② Prenons la moyenne :

$$\frac{\partial \bar{E}}{\partial t} + \bar{u}_e \frac{\partial \bar{E}}{\partial x_e} + 2\nu \frac{\partial \bar{u}_e}{\partial x_k} \overline{\frac{\partial u_i'}{\partial x_e} \frac{\partial u_i'}{\partial x_k}} = \frac{2}{\rho} \overline{\frac{\partial u_i'}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_e} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_k} \left[-p' \delta_{ie} + \tau'_{ie} + \rho u_i' u_e' - \rho \bar{u}_e' u_i - \rho \bar{u}_e u_i' \right] \right\}}$$

$$= \underbrace{\frac{2\nu}{\rho} \overline{\frac{\partial u_i'}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_e} \left(\frac{\partial - p' \delta_{ie}}{\partial x_k} \right)}}_{①} + \underbrace{\frac{2\nu}{\rho} \overline{\frac{\partial u_i'}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_e} \left(\frac{\partial \tau'_{ie}}{\partial x_k} \right)}}_{②}$$

$$+ \underbrace{\frac{2\nu}{\rho} \overline{\frac{\partial u_i'}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_e} \left\{ \frac{\partial \rho u_e' u_i'}{\partial x_k} \right\}}}_{③}$$

$$\underbrace{- \frac{2\nu}{\rho} \overline{\frac{\partial u_i'}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_e} \left\{ \frac{\partial \rho \bar{u}_e' u_i}{\partial x_k} \right\}}}_{④} \underbrace{- \frac{2\nu}{\rho} \overline{\frac{\partial u_i'}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_e} \left\{ \frac{\partial \rho \bar{u}_e u_i'}{\partial x_k} \right\}}}_{⑤}$$

$$① = -\frac{\partial}{\partial x_e} \left[\frac{2\nu}{\rho} \overline{\frac{\partial u_e'}{\partial x_k} \frac{\partial p'}{\partial x_k}} \right] + 2\nu \overline{\frac{\partial p'}{\rho \partial x_k} \frac{\partial^2 u_e'}{\partial x_e \partial x_k}}^{\,0}$$

car $\overline{\frac{\partial u_i'}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_e} \left(\frac{\partial}{\partial x_k} p' \delta_{ie} \right)} = \overline{\frac{\partial u_e'}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_e} \left(-\frac{\partial p'}{\partial x_k} \right)}$ car $i = e$

$$= -\frac{\partial}{\partial x_e} \left(\overline{\frac{\partial u_e'}{\partial x_k} \frac{\partial p'}{\partial x_k}} \right) + \overline{\frac{\partial p'}{\partial x_k} \frac{\partial^2 u_e'}{\partial x_e \partial x_k}}^{\,0}$$

$$② = \frac{2\nu}{\rho} \overline{\frac{\partial u_i'}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_e} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_k} \underbrace{\mu \left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_e} + \frac{\partial u_e'}{\partial x_i} \right)}_{\tau'_{ie}} \right\}}$$

$$= 2\nu^2 \overline{\frac{\partial u_i'}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial^2 u_i'}{\partial x_e^2} + \frac{\partial^2 u_e'}{\partial x_e \partial x_i}^{\,0} \right)} = 2\nu^2 \overline{\frac{\partial u_i'}{\partial x_k} \frac{\partial^2}{\partial x_e^2} \left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_k} \right)}$$

$$= \underbrace{2\nu^2 \frac{\partial}{\partial x_e} \overline{\left\{ \frac{\partial u_i'}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_e} \left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_k} \right) \right\}}}_{2\nu^2 \frac{\partial^2}{\partial x_e^2} \left(\frac{1}{2} \overline{\frac{\partial u_i'}{\partial x_k} \frac{\partial u_i'}{\partial x_k}} \right)} - 2\nu^2 \overline{\frac{\partial}{\partial x_e} \left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_k} \right) \frac{\partial}{\partial x_e} \left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_k} \right)}$$

$$= -\frac{\partial}{\partial x_e} \left[-\nu \frac{\partial E}{\partial x_e} \right] - 2 \overline{\left(\nu \frac{\partial^2 u_i'}{\partial x_e \partial x_k} \right)^2}$$

$$③ = \frac{2\nu}{\rho}\overline{\frac{\partial u_i'}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial x_k}\left\{\frac{\partial \rho u_e' u_i'}{\partial x_e}\right\}} = \frac{2\nu}{\rho}\overline{\frac{\partial u_i'}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial x_e}\left(\rho u_e' u_i'\right)} = 0$$

$$④ = -2\nu\overline{\frac{\partial u_i'}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial x_e}\left\{\frac{\partial}{\partial x_k}\left(u_e' \bar{u}_i\right)\right\}} = -2\nu\overline{\frac{\partial u_i'}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial x_e}\left(\bar{u}_i\frac{\partial u_e'}{\partial x_k} + u_e'\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k}\right)}$$

$$= -2\nu\overline{\frac{\partial u_i'}{\partial x_k}\left[\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_e}\frac{\partial u_e'}{\partial x_k} + \bar{u}_i\frac{\partial^2 u_e'}{\partial x_e \partial x_k} + \frac{\partial u_e'}{\partial x_e}\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} + u_e'\frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_e \partial x_k}\right]}$$

$$= -2\nu\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_e}\overline{\left[\frac{\partial u_i'}{\partial x_k}\frac{\partial u_e'}{\partial x_k}\right]} - 2\nu\overline{u_e'\frac{\partial u_i'}{\partial x_k}}\frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_e \partial x_k}$$

$$⑤ = -2\nu\overline{\frac{\partial u_i'}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial x_e}\left(\frac{\partial u_e' u_i'}{\partial x_k}\right)} = -2\nu\overline{\frac{\partial u_i'}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial x_e}\left(u_i'\frac{\partial u_e'}{\partial x_k} + u_e'\frac{\partial u_i'}{\partial x_k}\right)}$$

$$= -2\nu\overline{\frac{\partial u_i'}{\partial x_k}\left\{\frac{\partial u_i'}{\partial x_e}\frac{\partial u_e'}{\partial x_k} + \frac{\partial u_e'}{\partial x_e}\frac{\partial u_i'}{\partial x_k} + u_i'\frac{\partial^2 u_e'}{\partial x_e \partial x_k} + u_e'\frac{\partial^2 u_i'}{\partial x_e \partial x_k}\right\}}$$

$$= -2\nu\overline{\frac{\partial u_i'}{\partial x_k}\frac{\partial u_i'}{\partial x_e}\frac{\partial u_e'}{\partial x_k}} - 2\nu\overline{u_e'\frac{\partial u_i'}{\partial x_k}\frac{\partial^2 u_i'}{\partial x_e \partial x_k}}$$

$$\underbrace{-\frac{\partial}{\partial x_e}\left(\nu\overline{u_e'\frac{\partial u_i'}{\partial x_k}\frac{\partial u_i'}{\partial x_k}}\right)}_{} + \nu\overline{\frac{\partial u_e'}{\partial x_e}\frac{\partial u_i'}{\partial x_k}\frac{\partial u_i'}{\partial x_k}}$$

0

Remarque : $$-2\nu\overline{\frac{\partial \bar{u}_e}{\partial x_k}\frac{\partial u_i'}{\partial x_e}\frac{\partial u_i'}{\partial x_k}} = -2\nu\overline{\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_e}\frac{\partial u_k'}{\partial x_i}\frac{\partial u_k'}{\partial x_e}}$$

$$\overline{\frac{\partial u_e'}{\partial x_k}\frac{\partial p'}{\partial x_k}} = \overline{\frac{\partial u_e'}{\partial x_i}\frac{\partial p'}{\partial x_i}}$$

→ on retrouve l'équation exacte pour ε donnée en cours.

Equations de transport de la turbulence Exacte en Ecoulement Compressible

0.1 Equations aux tensions de Reynolds

Les équations de transport pour les tensions de Reynolds sont indispensables pour étudier en détail la structure de la turbulence. Elles sont obtenues en considérant les équations de continuité et de quantité de mouvement pour l'écoulement instantané et l'écoulement moyen:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_\ell}{\partial x_\ell} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho}\tilde{u}_\ell}{\partial x_\ell} = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i u_\ell}{\partial x_\ell} + \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\partial \tau_{i\ell}}{\partial x_\ell} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial \bar{\rho}\tilde{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho}\tilde{u}_i\tilde{u}_\ell}{\partial x_\ell} + \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} - \frac{\partial \bar{\tau}_{i\ell}}{\partial x_\ell} + \frac{\partial \widetilde{\bar{\rho} u_i'' u_\ell''}}{\partial x_\ell} = 0 \tag{2}$$

Prémultipliant l'Eq. (2) par u_j et $\tilde{u}_j$ nous obtenons:

$$u_j \frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial \rho u_i u_\ell}{\partial x_\ell} + u_j \frac{\partial p}{\partial x_i} - u_j \frac{\partial \tau_{i\ell}}{\partial x_\ell} = 0 \quad ; \quad \tilde{u}_j \frac{\partial \bar{\rho}\tilde{u}_i}{\partial t} + \tilde{u}_j \frac{\partial \bar{\rho}\tilde{u}_i\tilde{u}_\ell}{\partial x_\ell} + \tilde{u}_j \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} - \tilde{u}_j \frac{\partial \bar{\tau}_{i\ell}}{\partial x_\ell} + \tilde{u}_j \frac{\partial \widetilde{\bar{\rho} u_i'' u_\ell''}}{\partial x_\ell} = 0 \tag{3}$$

$$u_i \frac{\partial \rho u_j}{\partial t} + u_i \frac{\partial \rho u_j u_\ell}{\partial x_\ell} + u_i \frac{\partial p}{\partial x_j} - u_i \frac{\partial \tau_{j\ell}}{\partial x_\ell} = 0 \quad ; \quad \tilde{u}_i \frac{\partial \bar{\rho}\tilde{u}_j}{\partial t} + \tilde{u}_i \frac{\partial \bar{\rho}\tilde{u}_j\tilde{u}_\ell}{\partial x_\ell} + \tilde{u}_i \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j} - \tilde{u}_i \frac{\partial \bar{\tau}_{j\ell}}{\partial x_\ell} + \tilde{u}_i \frac{\partial \widetilde{\bar{\rho} u_j'' u_\ell''}}{\partial x_\ell} = 0 \tag{4}$$

où les Eqs. (4) sont obtenues des Eqs. (3) par changement d'indices. En ajoutant les Eqs. (3, 4) membre à membre nous obtenons après quelques manipulations[1]:

$$\frac{\partial \rho u_i u_j}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\ell}(\rho u_i u_j u_\ell) + u_j \frac{\partial p}{\partial x_i} + u_i \frac{\partial p}{\partial x_j} - u_i \frac{\partial \tau_{j\ell}}{\partial x_\ell} - u_j \frac{\partial \tau_{i\ell}}{\partial x_\ell} = 0 \tag{5}$$

$$\frac{\partial \bar{\rho}\tilde{u}_i\tilde{u}_j}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\ell}(\bar{\rho}\tilde{u}_i\tilde{u}_j\tilde{u}_\ell) + \tilde{u}_i \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j} + \tilde{u}_j \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} - \tilde{u}_i \frac{\partial \bar{\tau}_{j\ell}}{\partial x_\ell} - \tilde{u}_j \frac{\partial \bar{\tau}_{i\ell}}{\partial x_\ell} + \tilde{u}_j \frac{\partial \widetilde{\bar{\rho} u_i'' u_\ell''}}{\partial x_\ell} + \tilde{u}_i \frac{\partial \widetilde{\bar{\rho} u_j'' u_\ell''}}{\partial x_\ell} = 0 \tag{6}$$

En moyennant l'Eq. (5), nous obtenons:

$$\begin{aligned}
\overline{\rho u_i u_j} = \overline{(\bar{\rho} + \rho')(\tilde{u}_i + u_i'')(\tilde{u}_j + u_j'')} &= \overline{(\bar{\rho} + \rho')(\tilde{u}_i\tilde{u}_j + \tilde{u}_i u_j'' + u_i''\tilde{u}_j + u_i'' u_j'')} \\
&= \bar{\rho}\tilde{u}_i\tilde{u}_j + \overline{\rho'}\tilde{u}_i\tilde{u}_j + \overline{\rho u_j''}\tilde{u}_i + \overline{\rho u_i''}\tilde{u}_j + \overline{\rho u_i'' u_j''} \\
&= \bar{\rho}\tilde{u}_i\tilde{u}_j + 0 + 0 + 0 + \widetilde{\bar{\rho} u_i'' u_j''}
\end{aligned}$$

---

[1]

$$u_j \frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial \rho u_i u_\ell}{\partial x_\ell} + u_i \frac{\partial \rho u_j}{\partial t} + u_i \frac{\partial \rho u_j u_\ell}{\partial x_\ell} = \frac{\partial \rho u_i u_j}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\ell}(\rho u_i u_j u_\ell) + u_i u_j \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_\ell}{\partial x_\ell}\right) = \frac{\partial \rho u_i u_j}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\ell}(\rho u_i u_j u_\ell) + 0$$

$$\tilde{u}_j \frac{\partial \bar{\rho}\tilde{u}_i}{\partial t} + \tilde{u}_j \frac{\partial \bar{\rho}\tilde{u}_i\tilde{u}_\ell}{\partial x_\ell} + \tilde{u}_i \frac{\partial \bar{\rho}\tilde{u}_j}{\partial t} + \tilde{u}_i \frac{\partial \bar{\rho}\tilde{u}_j\tilde{u}_\ell}{\partial x_\ell} = \frac{\partial \bar{\rho}\tilde{u}_i\tilde{u}_j}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\ell}(\bar{\rho}\tilde{u}_i\tilde{u}_j\tilde{u}_\ell) + \tilde{u}_i\tilde{u}_j \left(\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho}\tilde{u}_\ell}{\partial x_\ell}\right) = \frac{\partial \bar{\rho}\tilde{u}_i\tilde{u}_j}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\ell}(\bar{\rho}\tilde{u}_i\tilde{u}_j\tilde{u}_\ell) + 0$$

où le dernier terme est 0 à cause de la continuité (Eq. 1).

$$\overline{\rho u_i u_j u_\ell} = \overline{(\bar\rho+\rho')(\tilde u_i+u_i'')(\tilde u_j+u_j'')(\tilde u_\ell+u_\ell'')}$$
$$= \overline{(\bar\rho+\rho')(\tilde u_i\tilde u_j\tilde u_\ell + u_i''u_j''u_\ell'' + u_i''u_j''\tilde u_\ell + u_i''u_\ell''\tilde u_j + u_j''u_\ell''\tilde u_i + \tilde u_i\tilde u_j u_\ell'' + \tilde u_j\tilde u_\ell u_i'' + \tilde u_i\tilde u_\ell u_j'')}$$
$$= \bar\rho\tilde u_i\tilde u_j\tilde u_\ell + \overline{\rho'}\tilde u_i\tilde u_j\tilde u_\ell + \overline{\rho u_i''u_j''u_\ell''} + \overline{\rho u_i''u_j''}\tilde u_\ell + \overline{\rho u_i''u_\ell''}\tilde u_j + \overline{\rho u_j''u_\ell''}\tilde u_i + \overline{\rho u_\ell''}\tilde u_i\tilde u_j + \overline{\rho u_i''}\tilde u_j\tilde u_\ell + \overline{\rho u_j''}\tilde u_i\tilde u_\ell$$
$$= \bar\rho\tilde u_i\tilde u_j\tilde u_\ell + 0 + \bar\rho\widetilde{u_i''u_j''u_\ell''} + \bar\rho\widetilde{u_i''u_j''}\tilde u_\ell + \bar\rho\widetilde{u_i''u_\ell''}\tilde u_j + \bar\rho\widetilde{u_j''u_\ell''}\tilde u_i + 0 + 0 + 0$$

$$\overline{u_j\frac{\partial p}{\partial x_i}} = \overline{(\tilde u_j+u_j'')\frac{\partial(\bar p+p')}{\partial x_i}} = \overline{u_j''}\frac{\partial\bar p}{\partial x_i} + \tilde u_j\frac{\partial\bar p}{\partial x_i} + \overline{u_j''\frac{\partial p'}{\partial x_i}} + \tilde u_j\frac{\partial\overline{p'}}{\partial x_i}$$
$$= \overline{u_j''}\frac{\partial\bar p}{\partial x_i} + \tilde u_j\frac{\partial\bar p}{\partial x_i} + \frac{\partial(\overline{p'u_j''}\delta_{i\ell})}{\partial x_\ell} - \overline{p'\frac{\partial u_j''}{\partial x_i}} + 0$$

$$\overline{u_i\frac{\partial p}{\partial x_j}} = \overline{(\tilde u_i+u_i'')\frac{\partial(\bar p+p')}{\partial x_j}} = \overline{u_i''}\frac{\partial\bar p}{\partial x_j} + \tilde u_i\frac{\partial\bar p}{\partial x_j} + \overline{u_i''\frac{\partial p'}{\partial x_j}} + \tilde u_i\frac{\partial\overline{p'}}{\partial x_j}$$
$$= \overline{u_i''}\frac{\partial\bar p}{\partial x_j} + \tilde u_i\frac{\partial\bar p}{\partial x_j} + \frac{\partial(\overline{p'u_i''}\delta_{j\ell})}{\partial x_\ell} - \overline{p'\frac{\partial u_i''}{\partial x_j}} + 0$$

$$\overline{u_j\frac{\partial\tau_{i\ell}}{\partial x_\ell}} = \overline{(\tilde u_j+u_j'')\frac{\partial(\overline{\tau}_{i\ell}+\tau_{i\ell}')}{\partial x_\ell}} = \tilde u_j\frac{\partial\overline{\tau}_{i\ell}}{\partial x_\ell} + \overline{u_j''}\frac{\partial\overline{\tau}_{i\ell}}{\partial x_\ell} + \tilde u_j\frac{\partial\overline{\tau_{i\ell}'}}{\partial x_\ell} + \overline{u_j''\frac{\partial\tau_{i\ell}'}{\partial x_\ell}}$$
$$= \tilde u_j\frac{\partial\overline{\tau}_{i\ell}}{\partial x_\ell} + \overline{u_j''}\frac{\partial\overline{\tau}_{i\ell}}{\partial x_\ell} + 0 + \frac{\partial(\overline{\tau_{i\ell}'u_j''})}{\partial x_\ell} - \overline{\tau_{i\ell}'\frac{\partial u_j''}{\partial x_\ell}}$$

$$\overline{u_i\frac{\partial\tau_{j\ell}}{\partial x_\ell}} = \overline{(\tilde u_i+u_i'')\frac{\partial(\overline{\tau}_{j\ell}+\tau_{j\ell}')}{\partial x_\ell}} = \tilde u_i\frac{\partial\overline{\tau}_{j\ell}}{\partial x_\ell} + \overline{u_i''}\frac{\partial\overline{\tau}_{j\ell}}{\partial x_\ell} + \tilde u_i\frac{\partial\overline{\tau_{j\ell}'}}{\partial x_\ell} + \overline{u_i''\frac{\partial\tau_{j\ell}'}{\partial x_\ell}}$$
$$= \tilde u_i\frac{\partial\overline{\tau}_{j\ell}}{\partial x_\ell} + \overline{u_i''}\frac{\partial\overline{\tau}_{j\ell}}{\partial x_\ell} + 0 + \frac{\partial(\overline{\tau_{j\ell}'u_i''})}{\partial x_\ell} - \overline{\tau_{j\ell}'\frac{\partial u_i''}{\partial x_\ell}}$$

puis en lui soustrayant l'Eq. (6) nous obtenons les *équations de transport des tensions de Reynolds*:

$$\frac{\partial\bar\rho\widetilde{u_i''u_j''}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\ell}(\bar\rho\widetilde{u_i''u_j''}\tilde u_\ell + \bar\rho\widetilde{u_i''u_j''u_\ell''} + \overline{p'u_j''}\delta_{i\ell} + \overline{p'u_i''}\delta_{j\ell} - \overline{u_i''\tau_{j\ell}'} - \overline{u_j''\tau_{i\ell}'})$$
$$+\bar\rho\widetilde{u_i''u_\ell''}\frac{\partial\tilde u_j}{\partial x_\ell} + \bar\rho\widetilde{u_j''u_\ell''}\frac{\partial\tilde u_i}{\partial x_\ell} - \overline{p'\left(\frac{\partial u_j''}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i''}{\partial x_j}\right)} + \overline{\tau_{j\ell}'\frac{\partial u_i''}{\partial x_\ell}} + \overline{\tau_{i\ell}'\frac{\partial u_j''}{\partial x_\ell}}$$
$$+ \underbrace{\overline{u_i''}\frac{\partial\bar p}{\partial x_j} + \overline{u_j''}\frac{\partial\bar p}{\partial x_i} - \overline{u_i''}\frac{\partial\overline{\tau}_{j\ell}}{\partial x_\ell} - \overline{u_j''}\frac{\partial\overline{\tau}_{i\ell}}{\partial x_\ell}}_{\text{effets directs des fluctuations de masse volumique}} = 0 \qquad (7)$$

Avant de poursuivre il convient de noter ici une importante propriété méconnue[2], concernant des moyennes sur des produits du type $\overline{a''b'}$ qui contiennent des fluctuations aussi bien classiques que de moyenne de Favre. Il est facile de montrer[3] que:

$$\overline{a'b'} \equiv \overline{a''b'} \equiv \overline{a'b''} \qquad (8)$$

[2] utilisée aussi par Strahle et Chandran [2] [3], et par Sarkar et al. [1]

[3]
$$\overline{\tilde a\tilde b} = \overline{(\tilde a+a'')(\tilde b+b')} = (\tilde a+\overline{a''})\tilde b + \overline{a''b'}$$
$$\overline{\tilde a\tilde b} = \overline{(\tilde a+a')(\tilde b+b')} = \tilde a\tilde b + \overline{a'b'}$$

et en utilisant l'identité $\overline{a''} = \bar a - \tilde a$ nous obtenons
$\overline{\tilde a\tilde b} = \tilde a\tilde b + \overline{a'b'} = \tilde a\tilde b + \overline{a''b'} \Longrightarrow \overline{a'b'} \equiv \overline{a''b'}$

Nous pouvons donc donner la forme simplifiée suivante:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \widetilde{\bar{\rho} u_i'' u_j''}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\ell}(\widetilde{\bar{\rho} u_i'' u_j''} \tilde{u}_\ell) = &-\frac{\partial}{\partial x_\ell}(\widetilde{\bar{\rho} u_i'' u_j'' u_\ell''} + \overline{p' u_j'} \delta_{i\ell} + \overline{p' u_i'} \delta_{j\ell}) + \frac{\partial}{\partial x_\ell}(\overline{u_i' \tau_{j\ell}' + u_j' \tau_{i\ell}'}) \\ &+ \overline{p'(2D_{ij}' - \frac{2}{3}\frac{\partial u_k'}{\partial x_k}\delta_{ij})} + \overline{p' \frac{2}{3}\frac{\partial u_k'}{\partial x_k}\delta_{ij}} \\ &+ \left(-\widetilde{\bar{\rho} u_i'' u_\ell''}\frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_\ell} - \widetilde{\bar{\rho} u_j'' u_\ell''}\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_\ell}\right) - \left(\overline{\tau_{j\ell}' \frac{\partial u_i'}{\partial x_\ell} + \tau_{i\ell}' \frac{\partial u_j'}{\partial x_\ell}}\right) \\ &- \left(\overline{u_i''}\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j} + \overline{u_j''}\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} - \overline{u_i''}\frac{\partial \bar{\tau}_{j\ell}}{\partial x_\ell} - \overline{u_j''}\frac{\partial \bar{\tau}_{i\ell}}{\partial x_\ell}\right) \end{aligned} \tag{9}$$

0.2 Bibliographie

[1] Sarkar, S., Erlebacher, G., Hussaini, M.Y., and Kreiss, H.O., "The Analysis and Modelling of Dilatational Terms in Compressible Turbulence," *J. Fluid Mech.*, Vol. 227, 1991, pp. 473–493.

[2] Strahle, W.C., and Chandran, S.B.S., "Pressure-Velocity Correlation in a Reactive Turbulent Flow," *AIAA J.*, Vol. 20, 1982, pp. 129–135.

[3] Strahle, W.C., "Pressure-Strain and Pressure-Scalr Gradient Correlations in Variable-Density Turbulent Flows," *AIAA J.*, Vol. 26, 1988, pp. 969–973.

Coordonnées cartésiennes — Notations Indicielles

$$\text{grad}\, \alpha = \frac{\partial \alpha}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial \alpha}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial \alpha}{\partial z}\vec{e}_z = \alpha_{,i}\,\vec{e}_i = \frac{\partial \alpha}{\partial x_i}\vec{e}_i$$

$$\Delta \alpha = \nabla^2 \alpha = \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial z^2} = \alpha_{,ii} = \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x_i \partial x_i}$$

$$\text{grad}\, \vec{a} = \begin{pmatrix} \frac{\partial a_x}{\partial x} & \frac{\partial a_x}{\partial y} & \frac{\partial a_x}{\partial z} \\ \frac{\partial a_y}{\partial x} & \frac{\partial a_y}{\partial y} & \frac{\partial a_y}{\partial z} \\ \frac{\partial a_z}{\partial x} & \frac{\partial a_z}{\partial y} & \frac{\partial a_z}{\partial z} \end{pmatrix} = a_{i,j}\,\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j = \frac{\partial a_i}{\partial x_j}\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$$

$$\text{div}\, \vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = a_{j,j} = \frac{\partial a_j}{\partial x_j}$$

$$\text{rot}\, \vec{a} = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\vec{e}_x + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\vec{e}_y + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\vec{e}_z$$

$$= \varepsilon_{ijk}\, a_{k,j}\,\vec{e}_i = \varepsilon_{ijk}\frac{\partial a_k}{\partial x_j}\,\vec{e}_i$$

$$\text{div}\, \mathbb{A} = \left(\frac{\partial A_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial A_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial A_{xz}}{\partial z}\right)\vec{e}_x + \left(\frac{\partial A_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial A_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial A_{yz}}{\partial z}\right)\vec{e}_y$$

$$+ \left(\frac{\partial A_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial A_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial A_{zz}}{\partial z}\right)\vec{e}_z = A_{ij,j}\vec{e}_i = \frac{\partial A_{ij}}{\partial x_j}\vec{e}_i$$

$$\Delta \vec{a} = \nabla^2 \vec{a} = \nabla^2 a_x\,\vec{e}_x + \nabla^2 a_y\,\vec{e}_y + \nabla^2 a_z\,\vec{e}_z$$

$$= a_{i,jj}\,\vec{e}_i = \nabla^2 a_i\,\vec{e}_i = \Delta a_i\,\vec{e}_i$$

→ Produit scalaire :

$$\vec{a}.\vec{b} = (a_i \vec{e_i}).(b_j \vec{e_j}) = a_i b_j \vec{e_i}.\vec{e_j} = a_i b_j \delta_{ij} = a_i b_i$$
$$= \vec{b}.\vec{a}$$

→ Produit vectoriel

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = (a_j \vec{e_j}) \wedge (b_k \vec{e_k}) = a_j b_k (\vec{e_j} \wedge \vec{e_k}) = \varepsilon_{ijk} a_j b_k \vec{e_i}$$
$$= -\varepsilon_{ikj} b_k a_j \vec{e_i} = -\vec{b} \wedge \vec{a}$$

→ Produit tensoriel

$$\vec{a} \otimes \vec{b} = a_i b_j \vec{e_i} \otimes \vec{e_j}$$
$$= (\vec{b} \otimes \vec{a})^T$$

→ Règles :

$$\vec{e_i} . (\vec{e_j} \otimes \vec{e_k}) = (\vec{e_i} . \vec{e_j}) \vec{e_k} = \delta_{ij} \vec{e_k}$$
$$(\vec{e_i} \otimes \vec{e_k}) . \vec{e_i} = \vec{e_j} (\vec{e_k} . \vec{e_i}) = \delta_{ik} \vec{e_j}$$

→ gradient (≡ produit tensoriel)

$$\text{grad } d = d_{,i} \vec{e_i}$$
$$\text{grad } \vec{a} = (a_i \vec{e_i})_{,j} \otimes \vec{e_j} = a_{i,j} \vec{e_i} \otimes \vec{e_j}$$
$$\text{grad } \overline{A} = (A_{ij} \vec{e_i} \otimes \vec{e_j})_{,k} \otimes \vec{e_k} = A_{ij,k} \vec{e_i} \otimes \vec{e_j} \otimes \vec{e_k}$$

→ divergence (≡ produit scalaire)

$$\text{div } d = d_{,i} . \vec{e_i} = 0$$
$$\text{div } \vec{a} = (a_i \vec{e_i})_{,j} . \vec{e_j} = a_{i,i}$$
$$\text{div } \overline{A} = (A_{ij} \vec{e_i} \otimes \vec{e_j})_{,k} . \vec{e_k} = A_{ij,k} \vec{e_i} \delta_{jk}$$
$$= A_{ij,j} \vec{e_i}$$

→ rotationel (= produit vectoriel)

$$\text{rot } \vec{a} = -(a_i \vec{e_i})_{,j} \wedge \vec{e_j}$$
$$= -a_{i,j} \vec{e_i} \wedge \vec{e_j} = -a_{i,j} \varepsilon_{ej} \vec{e_e} = +\varepsilon_{eji} a_{i,j} \vec{e_e}$$
$$= \varepsilon_{ije} a_{e,j} \vec{e_i}$$

→ produit contracté

$$\overline{A} \cdot \overline{B} = A_{ij} B_{ij}$$
$$= \overline{B} \cdot \overline{A}$$
$$= \overline{A}^T \cdot \overline{B}^T = A_{ji} B_{ji}$$

Rq $\text{tr}(A) = A_{ii} = \overline{A} : \overline{1}$